ضروب العدد :-

$ن! = ن(ن-1)(ن-2)$ ---- $1 \times 2 \times 3 \times \ldots$

$ن + 1 \in ن$ $\quad ٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

خواص المضروب :-

$ن! = ن(ن-1)!$ $\quad ٥! = ٥ \times ٤!$

$س - ٤ = س - ٥ \Leftarrow (س-٤)! = (س-٥)!$ $\quad ٧! = ٧ \times ٦!$

$ن - ٢ = ن - ٤ \Leftarrow (ن-٢)! = (ن-٤)!$ $\quad ن! = ١! = ١$

$س - ١ = ١ \Leftarrow (س-١)! = ١$

$س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

$س - ١ = ١ \Leftarrow س = ٢$

التباديل :-

$ل^{ن}_{ر} = ن(ن-1)(ن-2)$ ---- $(ن-ر+1)$

$ن \in ن^{+}$ $\quad ر \leq ن$

$ل^{٥}_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ل^{٤}_{٢} = ٤ \times ٣$

العامل الأول = $ن$

العامل الأخير = $ن - ر + 1$

العامل الأوسط = $\frac{ن + ر + 1}{٢}$

حسام ميرة

خواص التباديل :-

$^{٥}ل_{٣} = \frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٢}$

$^{ن}ل_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر}$ — مضروب الي فوقه / مضروب الفرق

$^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١} = \lfloor ن$ ، $^{٥}ل_{٥} = {}^{٥}ل_{٤} = \lfloor ٥$

$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥$ ، $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢$

$^{ن}ل_{٠} = ١ = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن} = ١$

$^{ن}ل_{١} = ن$

$^{٤ن-٣}ل_{٤} = {}^{٩}ل_{٤}$

$٤ن - ٣ = ٩$

$٤ن = ١٢$

$ن = ٣$

$^{١٧}ل_{م+٦} = {}^{٤٠}ل_{م+٦}$

$م + ٦ = ٠$

$م = -٦$

التوافيق :-

$^{٥}ق_{٣} = \frac{^{٥}ل_{٣}}{\lfloor ٣}$

$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \; \lfloor ن-ر}$

خواص التوافيق :-

① التبسيط

$^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

$^{١٥}ق_{١٣} = {}^{١٥}ق_{٢}$

$^{١٢}ق_{٩} = {}^{١٢}ق_{٣}$

$^{٢ن}ق_{٢ن-٥} = {}^{٢ن}ق_{٥}$

$^{ن}ق_{ن-٣} = {}^{ن}ق_{٣}$

$^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $\frac{^{ن}ل_{٠}}{\lfloor ٠}$

$^{ن}ق_{١} = ن$ ، $\frac{^{ن}ل_{١}}{\lfloor ١} = ن$

$^{ن}ق_{ن} = ١$ ، $\frac{^{ن}ل_{ن}}{\lfloor ن}$

$^{ن}ق_{٠} = ١$

حسام ميرة

② التساوى

$س^{ن} = ص^{ن}$

$س = ص$ ، $ن = س + ص$

$ن = ٠$ ، $ن = ٣$

$ن = ٥$ ، $ن = ١-$

$٥ - ٣ن$ ، $٢ن$

$٥ - ٣ن = ٢ن$

$٥ = ٥ن$

$ن = ١$

$٢^{٥} = ٢^{٥}$

$٢^{٢} \times ٢^{-٣} = ٢^{٥}$

③ النسبة

$\frac{\text{حد}}{\text{حد قبله}} = \frac{\text{حد}}{\text{حد قبله}}$

$\frac{ر^{ن}}{ر^{ن-١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}}$

$\frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}} = \frac{ر^{ن-ن+١}}{ر^{ن-١}}$

$\frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}} = \frac{ر^{١}}{ر^{ن-١}}$

④ المجموع

زود بمقدار الفرق (+١)

خذ ر كمية

$ر^{ن+١} = ر^{ن} + ر^{ن-١}$

$ر^{ن+٢} = ر^{ن+١} + ر^{ن}$

$ر^{ن+٣} = ر^{ن+٢} + ر^{ن+١}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢} + ر^{ن+١}}{ر^{ن+٢}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+٢}} + \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن+٢}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+٢}} + \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن+٢}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = ١ + \frac{١}{ر}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر+١}{ر}$

$\frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر+١}{ر}$

$\frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}} = \frac{ر+١}{ر}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}}$

$\frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}} = \frac{ر^{ن}}{ر^{ن-١}}$

$\frac{ر^{ن+٣}}{ر^{ن+٢}} = \frac{ر^{ن+٢}}{ر^{ن+١}} = \frac{ر^{ن+١}}{ر^{ن}} = \frac{ر^{ن}}{ر^{ن-١}} = \frac{ر^{ن-١}}{ر^{ن-٢}}$

صام صيرة

نظرية ذات الحدين:-

$(س + ص)^{ن} = س^{ن} + ن س^{ن-1} ص + \frac{ن(ن-1)}{2} س^{ن-2} ص^{2} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3} س^{ن-3} ص^{3} + \dots + ص^{ن}$

عدد الحدود = ن + 1

إشارة الحدود: داخل القوس (+) الحدود موجبة ، داخل القوس (-) الحدود بالتبادل سالب ، موجب ، وهكذا

$(س^{3} + \frac{1}{س})^{5}$

قوى (س): $(س^{2} + \frac{5}{س})^{12}$ قوى (س) تنازلية ، $(\frac{1}{س} + س^{3})^{5}$ قوى (س) تصاعدية

$ح_{1} = س^{ن}$

$ح_{الأخير} = ص^{ن}$

$(1 - س)^{3} (1 + س + س^{2})^{3} = (1 - س)^{3} = (1 - س)^{9}$

$(1 - 2س)^{10} (1 + 2س)^{10} = (1 - 4س^{2})^{10}$

$(س - 1)^{10} = (س^{2} - 2س + 1)^{5} = (س - 1)^{2 \times 5}$

$(\frac{1}{س} + س)^{6} = (\frac{1}{س^{2}} + 2 + س^{2})^{3} = \frac{(س + 1)^{2 \times 3}}{س^{2}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الحد الأوسط :

ن (س + ص)^{٦}

ن زوجي

عدد الحدود فردي

حد أوسط وحيد $(\frac{ن}{٢}+١)$

(س + ص)^{٦}

$\frac{٦}{٢}+١$

الحد الأوسط

ن (س + ص)^{٥}

ن فردي

عدد الحدود زوجي

حدان أوسطان $(\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢})$

(س + ص)^{٥}

$\frac{٥+١}{٢}$ ، $\frac{٥+٣}{٢}$

٤ ، ٦

الحدان الأوسطان

ن (عدد فردي)

فمثلاً (س + ص)^{٧}

① الحدان الأوسطان متساويان

$$س^{٣}ص^{٤} = س^{٤}ص^{٣}$$

② مجموع الحدان الأوسطان = صفر

$$س^{٣}ص^{٤} + س^{٤}ص^{٣} = ٠$$

③ النسبة بين الحدان الأوسطان على الترتيب

$$\frac{س^{٣}ص^{٤}}{س^{٤}ص^{٣}}$$

④ مجموع المعاملات ← نضع المجهول = ١

مجموع = $(١+١)^{٧}$

$(٢س + ٢ص)^{٧}$

$٢^{٧}(س + ص)^{٧}$

$١٢٨(س + ص)^{٧}$

$٢س = ٢ص$

$س = ص$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

القوس وحرافقه

$(س+ص)^{ن} \pm (س-ص)^{ن} = 2[ع_1 + ع_3 + ع_5 + \cdots]$

= ضعف اكدد الفردية الرتبة

$(س+ص)^{ن} - (س-ص)^{ن} = 2[ع_2 + ع_4 + ع_6 + \cdots]$

= ضعف اكدد الزوجية الرتبة

ن فردي ← $\frac{ن+1}{2}$

ن زوجي ← $\frac{ن}{2}+1$

ن فردي ← $\frac{ن+1}{2}$

ن زوجي ← $\frac{ن}{2}$

القوس المحور :-

① $(1+س)^{ن} = 1 + ق_1 س + ق_2 س^2 + \cdots + س^{ن}$

② $(1-س)^{ن} = 1 - ق_1 س + ق_2 س^2 - ق_3 س^3 + \cdots + (-س)^{ن}$

بوضع س = 1 في المقدوك الأول

$2^{ن} = 1 + ق_1 + ق_2 + \cdots + ق_{ن}$

بوضع س = -1

صفر = $1 - ق_1 + ق_2 - ق_3 + \cdots + ق_{ن}$

في مقدوك $(1+س)^{ن}$

مجموع معاملات حدود الفردية = مجموع معاملات حدود الزوجية

$= \frac{2^{ن}}{2} = 2^{ن-1}$

معامل $س^{ن}$ ← $ق_{ن}$

معامل $س^{0}$ ← $ق_0$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ازاى تحول المقلوك لذات الحدين :-

$(س + ص)^{ن}$

$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + \frac{ن}{1} أ^{ن-1} ب + \frac{ن(ن-1)}{2!} أ^{ن-2} ب^{2} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3!} أ^{ن-3} ب^{3} + \dots + ب^{ن}$

$(س - ص)^{ن} = أ^{ن} - \frac{ن}{1} أ^{ن-1} ب + \frac{ن(ن-1)}{2!} أ^{ن-2} ب^{2} - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3!} أ^{ن-3} ب^{3} + \dots + ب^{ن}$

$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + ن أ^{ن-1} ب + \frac{ن(ن-1)}{2!} أ^{ن-2} ب^{2} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3!} أ^{ن-3} ب^{3} + \dots + ب^{ن}$

$(أ - ب)^{ن} = أ^{ن} - ن أ^{ن-1} ب + \frac{ن(ن-1)}{2!} أ^{ن-2} ب^{2} - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3!} أ^{ن-3} ب^{3} + \dots + ب^{ن}$

$(1 - س)^{6} = 64$ ∴

$س = 1 - \quad س = 3$

$1 - 6س + \frac{6 \times 5}{2!} س^{2} - \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} س^{3} + \dots + س^{6} = 64$

$(س + ص)^{ن}$

$ح_{ر+1} = ق_{ر} (ص)^{ر} (س)^{ن-ر}$

$ح_{4+1} = ق_{4} (-2ص)^{4} (3س)^{4-4}$

$= ق_{4} (-2)^{4} (3)^{0} ص^{4} \times س^{0}$

$(س + \frac{2}{س})^{8}$

$ح_{4} = ق_{4} (\frac{2}{س})^{4} (س)^{5}$

$= ق_{4} \times 2^{4} \times س^{-4} \times س^{5}$

$ح_{م.ع} = ق_{5} (\frac{1}{س})^{5} \times س^{3}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

إيجاد الحد النونية : $(س+ص)^{ن}$

الحد النونية = الحد البدائية في مقلوك $(ص+س)$

رتبة الحد البدائية = عدد الكرود − الرتبة النونية + 1

$(٣س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{١٣}$

ح النونية = ح$_{١٠}$ صد بدائية

$(٣س^{٢} + \frac{-١}{س^{٢}})^{١٣}$

ح$_{١٠}$ = $\binom{١٣}{٩}$ $(٣س^{٢})^{٩}$ $(\frac{-١}{س^{٢}})^{٤}$

ن = ١٣ − ١٠ + ١ = ٤

ح$_{٥}$ = $\binom{١٢}{٤}$ $(\frac{-١}{س^{٢}})^{٤}$ $(٢-س^{٢})^{٩}$

حسام ميرة

ملاحظات هامة :-

① عدد الحدود بداخل القوس (م) وهدد لتوس عنه $ن$
عدد الحدود = $م^{ن}$

② مفكوك $(1+س)^{ن}$
$ن$ زوجي ← معامل الوسط أكبر معامل
$ن$ فردي ← معاملا الوسطيين أكبر معامل

بإشتقاقه الطرفين

$$ن(1+س)^{ن-1} = ن + ن(ن-1)س + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3}س^{2} + \cdots$$

ثم وضع $س = 1$

$$\therefore ن \times 2^{ن-1} = ن + ن(ن-1) + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3} + \cdots + ن$$

بإجراء التكامل :-

$$\frac{1}{ن+1}(1+س)^{ن+1} = ن + ن س + \frac{ن(ن-1)}{2}س^{2} + \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3}س^{3} + \cdots + س^{ن+1}$$

ثم وضع $س = 1$

$$\frac{1}{ن+1} \times 2^{ن+1} = ن + \frac{ن}{2} + \frac{ن(ن-1)}{2} + \cdots + \frac{1}{ن+1}$$

② في مفكوك $(1+جـس)^{ن}$ $(1+5س)^{3}$

معامل $س^{5} = ن \, جـ^{5}$

إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$:-

$(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية

$ن - ر$

① لوجد $ح_{ر+1} = ق_{ر}^{ن} (ص)^{ر} (س)^{ن-ر}$

② نساوى أس (س) بالأس المطلوب (ك)

③ لوجد الحد المشتمل على $س^{ك}$ بالتعويض عن (ر)

- لو كان المطلوب { حد خالى / حد مطلقه / ثابت / لا يحتوى س }

نساوى أس (س) = صفر

قاعدة أسرع (افترضى فقط)

$(س^{ب} + ص^{أ})^{ن}$

$ر = \frac{ك - ن ب}{ب - أ}$

$س^{ك}$ جـ $(س^{ب} + ص^{أ})^{ن}$

$ر = \frac{ك - ن ب + جـ}{ب - أ}$

$ر \notin ص^{+}$ ← يدل على وجود حد يشتمل على الأس المطلوب

صيرة

أوجد الحد المشتمل على $س^{٨}$ ص فى مفكوك :-

$(٢س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٠}$ حسب قوى س تنازلية

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (\frac{١}{س})^{١٠-ر} (٢س^{٢})^{ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times \frac{١}{س^{١٠-ر}} \times ٢^{ر} س^{٢ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times ٢^{ر} \times س^{-١٠+ر+٢ر}$

$س^{٨} = س^{-١٠+٣ر}$

$٣ر = ١٨$

$ر = ٤$ ← $ح_{٥}$

$ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \times ٢^{٤} \times س^{٨}$

$س = \frac{١}{ص}$ ، $س^{-١} = ص$

$\frac{ل - ٨ب}{ج - ب} = ر$

$\frac{٨ - ١٠ \times ٢}{(-١) - ٢} =$

$= ٤ = \frac{١٢}{٣} = ر$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

النسبة بين حدين متتاليين :-

$$\sim (س ص + ص ع)$$

ملاحظات هامة جدًا :-

س ، ص ، ع أطوال ثلاث أضلاع متناسبة

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع}$$

س ، ص ، ع حدود متتابعة حسابية

$$2ص = س + ع$$

س ، ص ، ع حدود متتابعة هندسية

$$ص^2 = س ع$$

① النسبة بين حدين متتاليين

$$\frac{ص ع}{س^2} \times \frac{ن + 1 - ن}{ن} = \frac{ع^{ن+1}}{س^{ن}}$$

الثاني / الأول

② النسبة بين حدين متتاليين

$$\frac{ع^{م+ن}}{س^{م} ع^{ن}} \times \frac{ن + 1 - ن}{ن} = \frac{ع}{س}$$

إيجاد رتبة آبر حدود آبر معامل :-

$(P-س+U\,ص)^{\sim}$ ← آبر صد عددًا وليكن $ح_{ر+1}$

$\left|\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}}\right| \geq 1$

آبر صد أو يساوي الحد قبله

$\left|\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر+2}}\right| \geq 1$

آبر صد أو يساوي الحد بعده

قوانين حرية (اختر فقط) :-

رتبة آبر حد مضلوع $(P-س+U\,ص)^{\sim}$ ← (م)

$$م = \frac{|\text{الثاني}| \times (ن+1)}{|\text{الثاني}| + |\text{الأول}|}$$

رتبة الحد الذي له آبر معامل

$(P-س+U\,ص)^{\sim}$ ← (م)

$$م = \frac{\left|\frac{U}{P}\right|(ن+1)}{\left|\frac{U}{P}\right|+1}$$

م(كسر) ← رتبة الحد أول عدد صحيح بعده

م(عدد صحيح) ← يوجد حدان

م ، م+1

صام ميرة

$(س^{-2} - ص^{3})^{10}$

① القيمة العددية لأبسط حد ← $س = 1$ ، $ص = 3$

② اوجد قيمة أكبر معامل في المفكوك $ح_{ر+1}$

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$

$\frac{10-ر+1}{ر} \times \left|\frac{-ص^{2}}{س^{3}}\right| \geq 1$

$\frac{11-ر}{ر} \times \frac{9}{7} \geq 1$

$99 - 9ر \geq 7ر$

$99 \geq 11ر$

$ر \leq 9$

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$

$\frac{10-ر+1}{ر+1} \times \left|\frac{9}{7}\right| \geq 1$

$9 - 90 \leq 7ر + ر$

$11ر \geq 77$

$ر \geq 7$

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$

$\frac{11-ر}{ر} \times \frac{3}{7} \geq 1$

$33 - 3ر \geq 7ر$

$33 \geq 10ر$

$ر \leq 3.3$

$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} \geq 1$

$\frac{10-ر}{ر+1} \times \frac{2}{7} \geq 1$

$20 - 2ر \geq 2ر + 7$

$28 \geq 5ر$

$ر \leq 5.6$

$م = \frac{9 \times 11}{7+9} = 9$

$م = \frac{\frac{7}{7} \times 11}{\frac{7}{7}+1} = 7.7$

$ر = 6 \leftarrow ر \leq 6.6 \leq ر$

$ح_{6} = {}^{10}ق_{6} (-2)^{6} (7)^{4} = 33792$

حسام ميرة

العدد التخيلي: $ت$

العدد الذي مربعه = -١

$ت = \sqrt{-١}$

$ت^{٢} = -١$

$ت^{٣} = -ت$

$ت^{٤} = ١$ $\quad ت = ١$

تبسيط لقوى العدد التخيلي

(اقسم الأس ÷ ٤) موجب

٠٫٢٥ د	٠٫٥ د	٠٫٧٥ د	عدد صحيح
$ت$	-١	$-ت$	١

$ت^{-٥} = \frac{١}{ت^{٥}} = \frac{١}{ت} = -ت$

$ت^{-١٩} = \frac{١}{ت^{١٩}} = \frac{١}{-ت} = ت$

$ت^{-٤٢} = \frac{١}{ت^{٤٢}} = \frac{١}{١} = ١$ $\quad ت^{-٦٠} = \frac{١}{ت^{٦٠}} = \frac{١}{١} = ١$

$ت^{٧٠٠} = ت^{٧ \times ٤ + ٢} = ت^{٢} = -١$ $\quad ٤ \overline{)٧٠٠}$ ، $ن = ٤ ص + ٢$

$ت^{٩٦} = (-١)^{٤٨} = ١$ $\quad ٤ \overline{)٩٦}$

$ت^{٩٧} = (-١)^{٤٨} \times ت = ت$

$ت^{٩٨} = (-١)^{٤٩} = -١$

$ت^{٩٩} = (-١)^{٤٩} \times ت = -ت$

$ت^{١٠٠} = (-١)^{٥٠} = ١$

$ت^{٣} = -ت$ $\quad ت^{٤١} = ت$ $\quad ت^{٦٢} = -١$ $\quad ت^{١٠٠} = ١$

١٥ ← ٢٫٧٥ ← ٤١ ← ١٠٫٢٥ ← ٦٢ ← ١٥٫٥ ← ١٠٠ ← ٢٥

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

مجموعة الأعداد المركبة (ل) :-

ل = { س + ت ص : س ∈ ح ، ص ∈ ح }

حقيقي ← س ، ص ← تخيلي

تساوي عددين مركبين

س١ + ص١ ت = س٢ + ص٢ ت

٢ + ٣ ت = س + ص ت

ص١ = ص٢ ← س١ = س٢

العمليات على الأعداد المركبة :-

ع١ = س١ + ص١ ت

ع٢ = س٢ + ص٢ ت

① ع١ + ع٢ = (س١ + س٢) + (ص١ + ص٢) ت

② ع١ − ع٢ = (س١ − س٢) + (ص١ − ص٢) ت

③ ل ع١ = ل س١ + ل ص١ ت

④ ع١ × ع٢ = س١ (س٢ + ص٢ ت) + ص١ ت (س٢ + ص٢ ت)

⑤ ع١ / ع٢ = (س١ + ص١ ت) / (س٢ + ص٢ ت) × (س٢ − ص٢ ت) / (س٢ − ص٢ ت)

ع١ = ٢ − ٤ ن

ع٢ = −١ + ن

(٢ − ٤ ن)(−١ + ن) / (−١ + ن)

= −٣ + ٢ ن + ٤ ن + ٤ / ١ + ن

(−٢ − ٢ ن + ٤ ن − ٤) / (١ + ١)

= −٧ + ن / ٢ = −٧/٢ + ١/٢ ن

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

الهندسة التحليلية:-

ع = س + ص ت

المرافقة ع̄ = س − ص ت

٥ + ٢ت ← ٥ − ٣ت

١ − ٢ت ← ١ + ٢ت

٧ت ← −٧ت

−٣ ← −٣

ع + ع̄ = ٢س (حقيقي صرف)

ع − ع̄ = ٢ص ت (تخيلي صرف)

ع ع̄ = س² + ص² (حقيقي صرف)

(٥ + ٢ت)(٥ − ٣ت)

٢٥ + ٩ = ٣٤

ع + ع̄ = (٧ − ٣ب) + (١٥ − ٣ب) ت

٠ = ٢ب − ١٥

١٥ = ٢ب

ب = ٥

فإن ب = ٥

ملاحظات هامة جدًا:-

① (س + ص ت)² = س² + ٢س ص ت − ص² ← ص² ت²

② (١ + ت)² = ٢ت ← (١ − ت)² = −٢ت

③ (١ + ت)¹⁰ = (٢ت)⁵ = ٣٢ت

④ (١ − ت)⁸ = (−٢ت)⁴ = ١٦

(١ + ت)²⁴ = (٢ت)¹⁶ (١ − ت)⁵⁰ = (−٢ت)²⁵

f D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

⑤ $ن^{م} + ت_{ن} + ت_{ن} + ت_{ن} = صفر$

لو م، ن أعداد صحيحة متتالية
// زوجية متتالية
// فردية متتالية

$ن_{1} + ت_{2} + ت_{4} = .$

$ن_{18} + ت_{20} + ت_{22} + ت_{24} = .$

$ن_{21} + ت_{22} + ت_{24} + ت_{27} = .$

$1 + ت_{1} + ت_{2} + ت_{3} + \dots + ت_{10} = 1$

$اس^{2} + 2س - 2 = .$

$ن س^{2} - 5ت س + 2 = .$

معادلة الدرجة الثانية :-

$م س^{2} + ب س + حـ = صفر$

$ل + م = \frac{-ب}{م}$ $\quad$ $ل م = \frac{حـ}{م}$

$ل - م = \pm \frac{\sqrt{ب^{2} - 4 م حـ}}{م}$

ل ، م جذرى المعادلة

$ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - 2 ل م$

$= (ل - م)^{2} + 2 ل م$

$2ن س^{2} - 4ت س + 3ت_{3} = صفر$

$ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - 2 ل م = 2^{2} - 2 \times \frac{3}{2} = 4 + 3 = 7$

$ل + م = \frac{4ت}{2ت} = 2$ $\quad$ $ل م = \frac{3ت}{2ت} = \frac{3}{2}ن = \frac{3}{2}$

$الكل لعام = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - 4 م حـ}}{2م}$

اى معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها اعداد حقيقية [لها جذران تخيليان مرافقان]

اى معادلة درجة ثالثة معاملاتها اعداد حقيقية لها جذر حقيقى [الجذران الآخران مركبان مترافقان]

حسام ميرة

الصورة المثلثية للعدد المركب :-

اذا كان :-

$ع = س + صت$

$س = ل جتا\theta$

$ص = ل جا\theta$

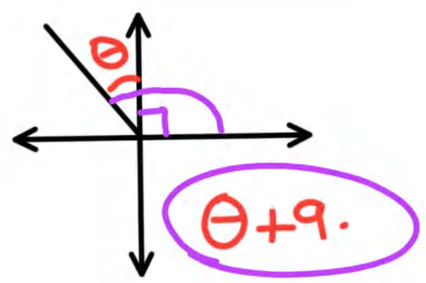
$ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$

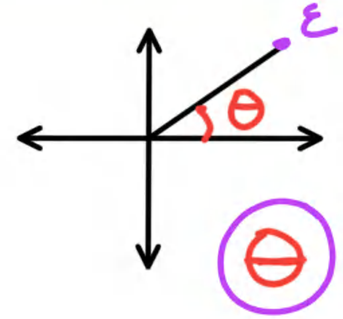
$ل$ جتاθ ← المقياس (طويلة العدد التخيلي)

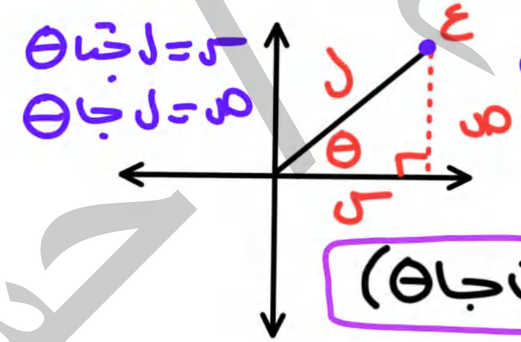
θ ← سعة العدد المركب (الأساسية)

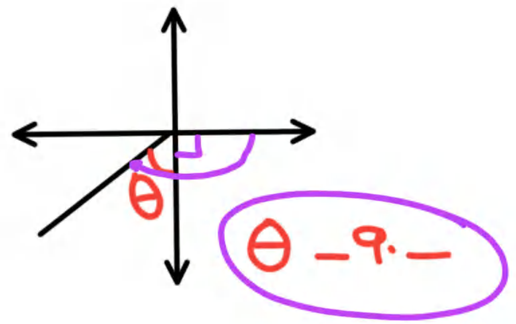
$\theta \in]-\pi ، \pi]$

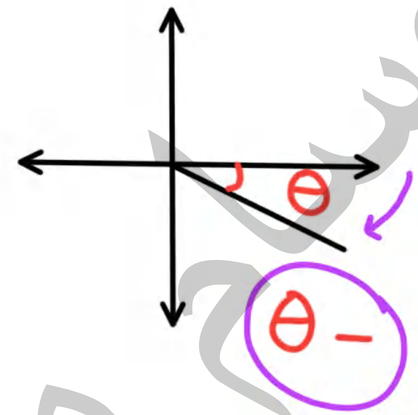
$ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$





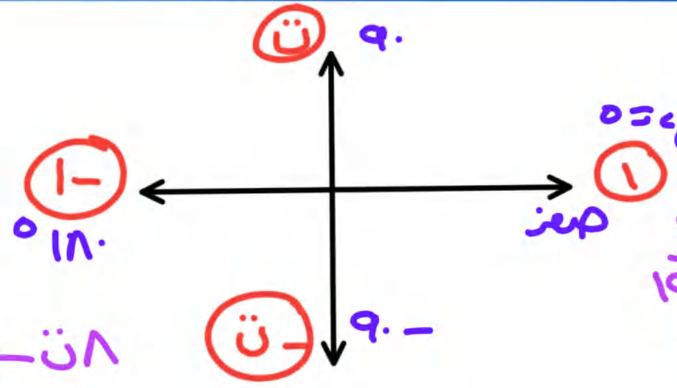






موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

كيفية إيجاد الصورة المثلثية :-



$١ = حتا٠ + ت جا٠$

$ن = حتا٩٠ + ت جا٩٠$

$-ن = حتا-٩٠ + ت جا-٩٠$

$-١ = حتا١٨٠ + ت جا١٨٠$

$٨ن \leftarrow ٨(حتا٩٠ + ت جا٩٠)$

$-٤ن \leftarrow ٤(حتا-٩٠ + ت جا-٩٠)$

$٣ \leftarrow ٣(حتا٠ + ت جا٠)$

$-٢ن \leftarrow ٢(حتا١٨٠ + ت جا١٨٠)$

عدد تخيلي موجب $\theta = ٩٠°$

" " سالب $\theta = -٩٠°$

اي عدد حقيقي موجب $\theta = صفر$

" " " سالب $\theta = ١٨٠°$

$ع = -٢ - ٤ت$

$ل = |ع| = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٤)^٢} = ٥$

$\theta = \frac{-٤}{-٢}$

١٢٧	٥٢
-١٢٧	-٥٢

$ع = ٢ + ٢\sqrt{٢}ت$

$ظا\theta = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٢}$

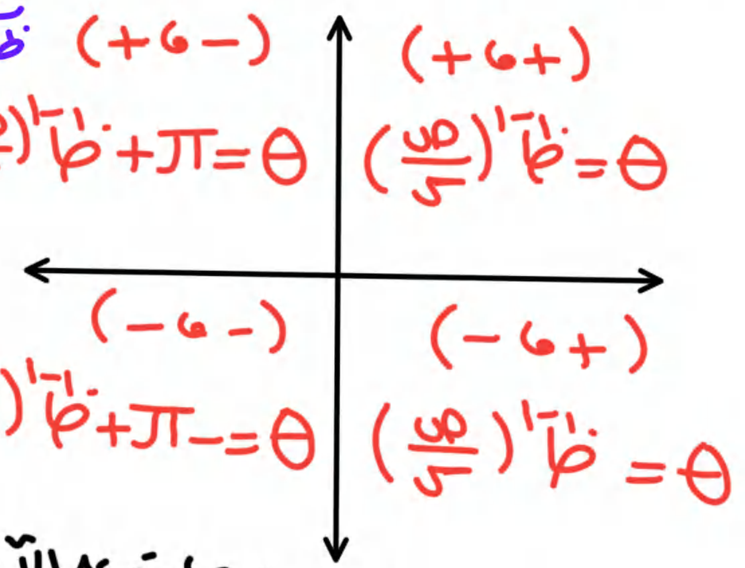
$\sqrt{٢}$	٢٠
$-\sqrt{٢}$	-٢٠

الصورة

$ظا\theta = \frac{ص}{س}$

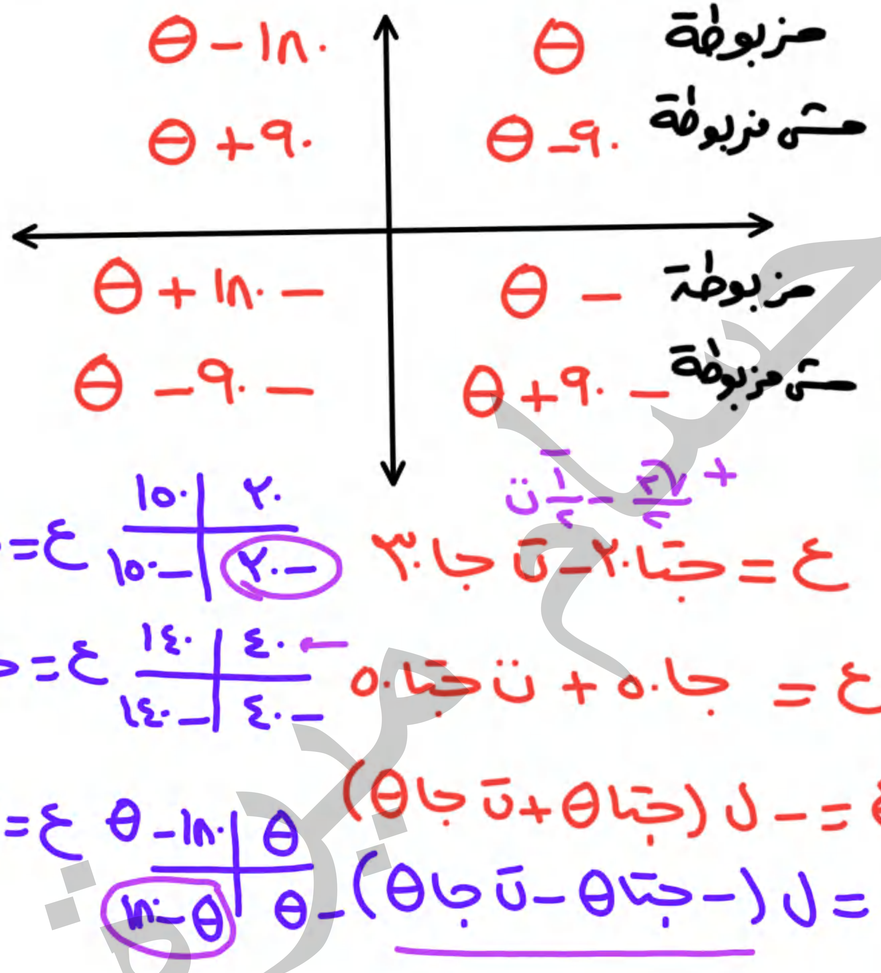
المقياس

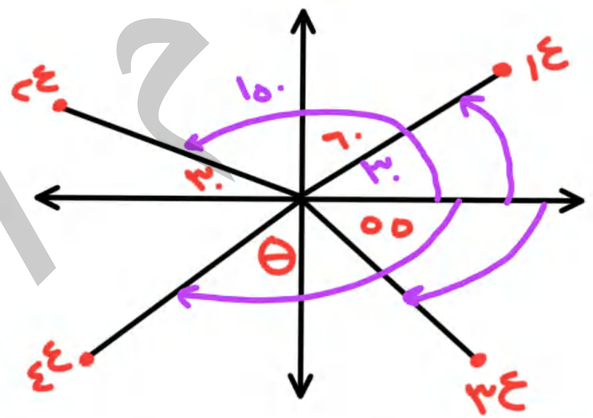
$ل = |ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الصورة المثلثية بدلالة القياسية :-





$\theta_1 = ٣٠^\circ$ $\quad \theta_2 = ١٥٠^\circ$ $\quad \theta_3 = ٥٥^\circ$ $\quad \theta_4 = \theta - ٩٠^\circ$

$\theta = ٣\theta_3 = ٣(٥٥^\circ)$

$ع = جتا ٢٠ - ن جا ٣٠$

	٢٠	١٥٠
	(٢٠−)	١٥٠−

$ع = جتا - ٢٠ + ن جا - ٣٠$

$ع = جتا ٤٠ + ن جا ٤٠$

	٤٠	١٤٠
	٤٠−	١٤٠−

$ع = جا ٥٠ + ن جتا ٥٠$

$ع = - ل (جتا θ + ن جا θ)$

$= ل (- جتا θ - ن جا θ) - θ$

	θ	θ − ١٨٠
	θ − ١٨٠	(θ − ١٨٠)−

$ع = ل (جتا (θ − ١٨٠) + ن جا (θ − ١٨٠))$

$ل (جتا θ + ن جا θ)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات مقياس العدد المركب :-

$|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$

$\left|\frac{ع}{\bar{ع}}\right| = \left|\frac{ع}{ع}\right| = 1$

$|ع^{ن}| = |ع|^{ن}$

$ع \times \bar{ع} = |ع|^{2} = |\bar{ع}|^{2}$

إذا كان ع / ع^{2} / ع^{3} تمثل ٣ رؤوس لمضلع متساوي الأضلاع داخل دائرة واحدة

$|ع| = |ع^{2}| = |ع^{3}| = 1$

① $|ن ع| = |ن \bar{ع}|$ ⟵ ع = ٢ − ٤ن ، ع = ٢ + ٤ن ، ن ع = ٢ن + ٤

② $\left|\frac{٢ - ٤ن}{٢ + ٤ن}\right| = 1$ ⟵ ١١ = ٥ ، ١١ = ٥ ⟵ (٢ − ٤ن)(٢ + ٤ن) ⟵ ٩ + ١٦ = ٢٥

③ سعة ع$_{١}$ − سعة ع$_{٢}$ = ١٨٠°

④ سعة ع$_{١}$ = سعة ع$_{٢}$

ملاحظات سعة العدد المركب :-

ع	$\bar{ع}$	$-\bar{ع}$	$\frac{١}{ع}$	$-\frac{١}{ع}$
θ	−θ	π − θ	−θ	θ

سعة (ع) − سعة (−ع) = ± π

سعة (ع) ⟵ π − θ

سعة (−ع) ⟵ θ

$|ع_{١} \pm ع_{٢}|^{2} = |ع_{١}|^{2} + |ع_{٢}|^{2}$

$|ع_{١} - ع_{٢}| = |ع_{١}| - |ع_{٢}|$

$|ع_{١} + ع_{٢}| = |ع_{١}| + |ع_{٢}|$

⑤ $|ع_{١}| = |ع_{٢}|$ و سعة ع$_{١}$ + سعة ع$_{٢}$ = π ⟵ $ع_{١} = -\bar{ع_{٢}}$

⑥ $|ع_{١}| = |ع_{٢}|$ و سعة ع$_{١}$ + سعة ع$_{٢}$ = صفر ⟵ $ع_{١} = \bar{ع_{٢}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑤ اذا كان العدد المركب $ع = ع_1 + ع_2$

وكان $|ع_1| = |ع_2| = ل$

$\therefore |ع| = 2ل$ جتا $\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

$\rightarrow$ سعة $ع = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

$ع = ع_1 + ع_2$ ٢-٤ ن

$ع = 0$ ٢-٤ ن (-٨ ن)

⑤ $\overline{ع_1 \pm ع_2} = \overline{ع_1} \pm \overline{ع_2}$

⑥ $\overline{ع_1 \times ع_2 \times ع_3} = \overline{ع_1} \times \overline{ع_2} \times \overline{ع_3}$

⑦ $\overline{\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)} = \frac{\overline{ع_1}}{\overline{ع_2}}$

⑧ $\overline{(ع)} = ع$

ملاحظات مرافقة العدد المركب :-

① $ع + \overline{ع} = 2س$

② $ع - \overline{ع} = 2ص$ ت

③ $ع \overline{ع} = س^2 + ص^2$

④ $\frac{1}{ع} = \frac{1}{س^2 + ص^2} \times \overline{ع}$

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{س_2 + ص_2}{س_1 + ص_1}$

$ع_1 = 1 + 2$ ت θ_1

$ع_2 = -1 + 2$ ت θ_2

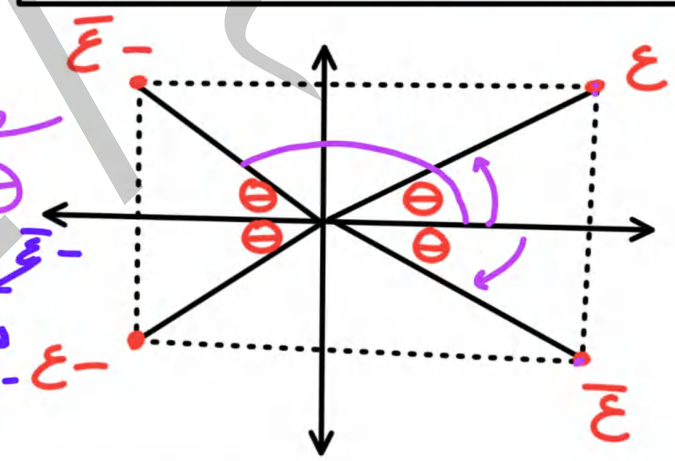
$ع = ع_1 + ع_2$

سعة $(ع) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

$|ع| = 2ل$ جتا $\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

حسام ميرة

العدد المركب (ع) وتوابعه:-



ع صورة ع ← انعكاس محور السينات

-ع صورة ع ← " نقطة الأصل

-ع صورة ع ← " محور الصادات

سعة ع	سعة -ع	سعة -ع
$-\theta$	$\pm 180 + \theta$	$180 - \theta$

العدد ع ← $|ع| = ل$ ← θ

العدد $ع^{-1} = \frac{1}{ع}$ ← $|\frac{1}{ع}| = \frac{1}{ل}$ ← $-\theta$

سعة ع = θ

الصورة الأسية للعدد المركب:-

$ع = س + ن ص$ (جبرية)

$ع = ل(جتا\theta + ن جا\theta)$ (مثلثية) ← ستين / دائرى

$ع = ل هـ^{ن\theta}$ (أسية) لازم θ دائرى

$ع = ل هـ$ ، $ع = ل هـ^{ن\theta}$

$ع = ل هـ \times ل هـ = ل \times ل هـ^{ن\theta + ن\theta}$

العمليان على الأعداد المركبة :-

$ع_1 \times ع_2 = ل_1 ل_2 [(جتا(\theta_1+\theta_2)+ت جا(\theta_1+\theta_2))]$

$= ل_1 ل_2 هـ^{ت(\theta_1+\theta_2)}$

$ع_ن = ل^ن (جتا ن\theta + ت جا ن\theta)$ ن عدد صحيح

$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} [(جتا(\theta_1-\theta_2)+ت جا(\theta_1-\theta_2))]$

$= \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{ت(\theta_1-\theta_2)}$

نظرية ديموافر

$ع = ل(جتا\theta + ت جا\theta)$

$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}} (جتا\frac{\theta+٣٦٠ك}{ن} + ت جا\frac{\theta+٣٦٠ك}{ن})$

ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، (ن-١)

الطريقة الجبرية السريعة لإيجاد الجذور التربيعية (اختر فقط) ←

$ع = \pm(\sqrt{\frac{ل+ك}{٢}} \pm \sqrt{\frac{ل-ك}{٢}} ت)$

ل ← مقياس العدد

ك ← الجزء المقابل للعدد

مثال:

$ع^{\frac{1}{٢}} = ٢(جتا٢٠ + ت جا٢٠)$

$ع^{\frac{1}{٥}} = ٣٢(جتا١٥٠ + ت جا١٥٠)$

$ع^{\frac{1}{٣}} = ٨(جتا٦٠ + ت جا٦٠)$

جتا ٣٠ = جتا ٣٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ١٠٠ = جتا ١٤٠ = $-\frac{١}{٢}$

جا ٣٠ = جا ١٥٠ = $\frac{١}{٢}$

المعادلة $س^{ن} = P$

يكون به حاصل ضرب جذورها

ن زوجي ← حاصل الضرب = $-P$

ن فردي ← حاصل الضرب = P

ملاحظات هامة جدًا :-

① $ع_1 / ع_2 / ع_3 / ---- / ع_{ن-1}$ يمثل جذور العدد المركب (ع)

فإنه $ع_{ن+1} = ع_1$ و $(ع_ن)^{ن} = \frac{٣٦٠}{ن}$

② عند تمثيل الجذور على شكل أرجاند تمثل برؤوس مضلع منتظم داخل دائرة طول نصف قطرها $\sqrt[ن]{ل}$ ويكون الشكل مضلع منتظم ✓

⑦ $ع^{ن} = P$

- حقيقية ← ن زوجي (٢ حقيقي الباقي تخيلي)
- ن فردي (١ " " " ")

تخيلية ← $ع^{ن} = -P$

(جميع الجذور تخيلية)

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$ل^٢ = س^٢ + ص^٢$

③ م لطول القطع = $\frac{ن}{٢}$ حا $\frac{٣٦٠}{ن}$ $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ نصف قطر

④ طول ضلع المضلع = ٢ نق $\sqrt{١ - جتا \frac{٣٦٠}{ن}}$

⑤ مساحة أي جذر يكمل عليه بإضافة $\frac{٣٦٠}{ن}$ إلى الجذر السابق له

⑥ مجموع جذور أي عدد مركب = صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

$ع = ١$ $(ع)^{\frac{١}{٣}}{}^{٣} = ع^{\frac{٣}{٣}}$

$ع_١ = جتا٠ + ت جا٠ = ١$

$ع_٢ = جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠ = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

$ع_٣ = جتا -١٢٠ + ت جا -١٢٠ = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

(١) $س^{٣} = ١$

الأس ÷ ٣ = ١

عدد وتلت = $س$

وعدد $\frac{٢}{٣}$ = $س^{٢}$

$س^{٢}$ $س$ و (١)

$س^{٣} = ١$

$س^{٢} = س$

$س^{٤} = س$

(٢) $\frac{ص}{س} = ص س$ $\frac{ص}{س^{٢}} = ص س$

(٣) $١ + س + س^{٢} = صفر$

$١ + س = -س^{٢}$ $س + س^{٢} = -١$ $١ + س^{٢} = -س$

$ص(١ + س)$

$ص + ص س = -ص س^{٢}$ $ص + ص س = -ص س$

$ص + ص س + ص س^{٢} = صفر$ $ص + ص س + ص س = ٣ص س^{٢} = -٣$

$ص + ص س + ص = ٩ص س^{٢} = -٩ص س$

(٤) $س^{٢} - س = س - س^{٣} = \pm \sqrt{٣} ت$

(٥) $\frac{ص + د س}{ص س^{٢} + د} = \frac{ص + د س}{ص س + د س^{٢}} = \frac{ص + د س}{س(ص + د س)} = \frac{١}{س}$

(٦) $ع = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ $س / س^{٢}$

$ع = \frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

(٧) مرافقه $س \leftarrow س^{٢}$

" $س^{٢} \leftarrow س$

(٨) $|س| = |س^{٢}| = ١$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد (س ، ص ، ع)

	محور س	محور ص	محور ع	مستوى س ص	مستوى ص ع	مستوى س ع
نقطة ∈ عليه	(س، ٠، ٠)	(٠، ص، ٠)	(٠، ٠، ع)	(س، ص، ٠)	(٠، ص، ع)	(س، ٠، ع)
معادلة	ص = ٠ ، ع = ٠	س = ٠ ، ع = ٠	س = ٠ ، ص = ٠	ع = ٠	س = ٠	ص = ٠
طول العمود	$\sqrt{ص^2 + ع^2}$	$\sqrt{س^2 + ع^2}$	$\sqrt{س^2 + ص^2}$	|ع| =	|س| =	|ص| =
المقط	(س، ٠، ٠)	(٠، ص، ٠)	(٠، ٠، ع)	(س، ص، ٠)	(٠، ص، ع)	(س، ٠، ع)
الانقلاس	(-س، ص، ع)	(س، -ص، ع)	(س، ص، -ع)	(-س، -ص، ع)	(-س، ص، -ع)	(س، -ص، -ع)

طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ على المستوى الذى معادلته :-

① $س = P \leftarrow |س_1 - P|$

② $ص = P \leftarrow |ص_1 - P|$

③ $ع = P \leftarrow |ع_1 - P|$

البعد عن نقطة الأصل (٠، ٠، ٠)

$\sqrt{س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2}$

لاى تقطتين P (س١، ص١، ع١) ، ب (س٢، ص٢، ع٢) يكون :-

① $UP = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

② منتصف $\overline{UP} = \left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2} \right)$

اذا كانت ح منتصف $\overline{UP}$ فإن :-

نقطة الطرف = ٢ × المنتصف - الطرف الاخر

① $P = 2ح - ب$

② $ب = 2ح - P$

ح (-٣، ٦، ٤)

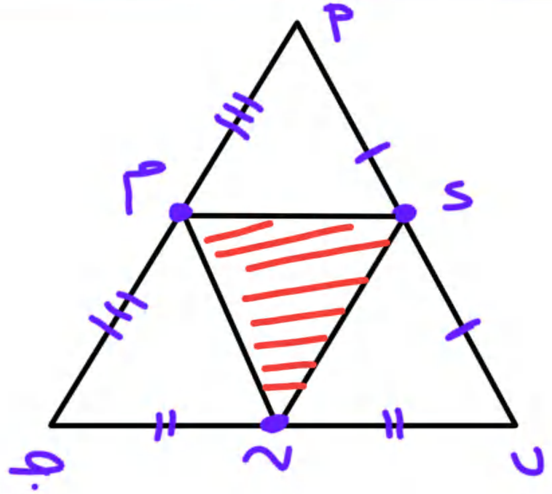
P (٥، ٤، ٠)

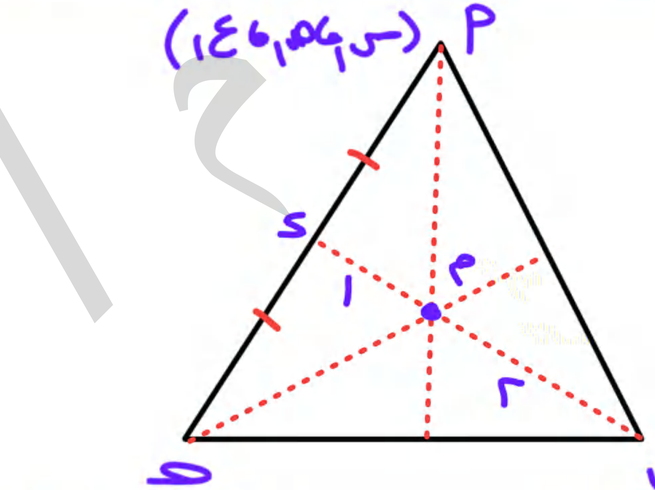
$ب = 2ح - P$

$= (-٤، ٦، ٦) - (٥، ٤، ٠)$

$= (-٩، ٢، ٦)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK





اذا كانت s ، م هما منتصفا $\overline{PA}$ ، $\overline{PB}$ فإن :-

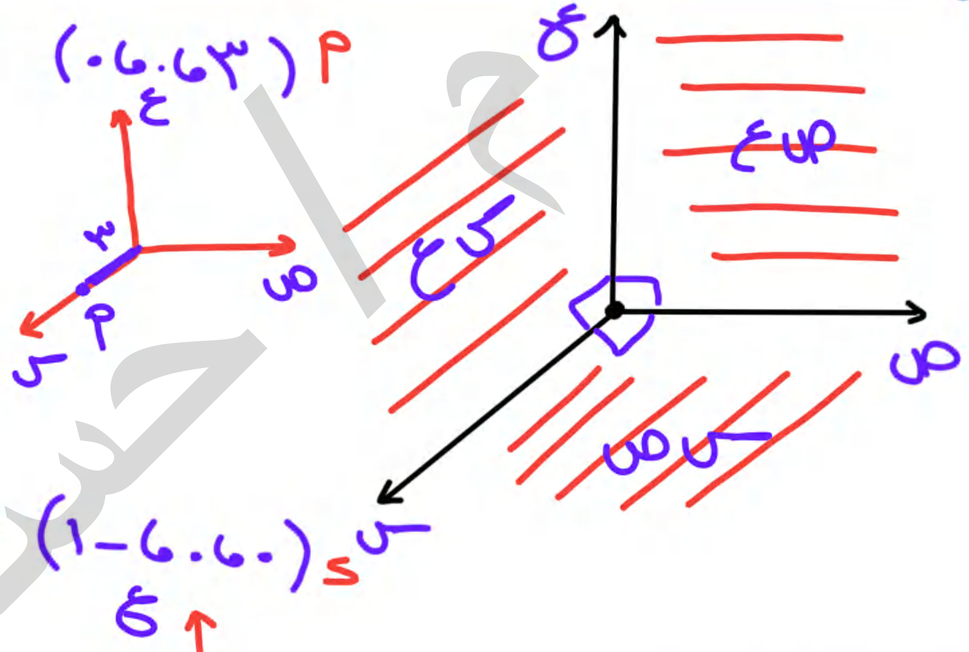
① محيط Δ s P م = $\frac{1}{2}$ محيط Δ P A B

② نقطة تلاقي متوسطات Δ P A B هي نفسها نقطة تلاقي متوسطات Δ s P م

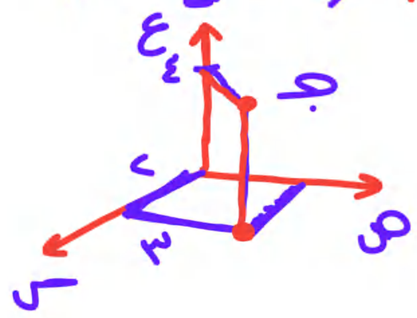
نقطة تلاقي المتوسطات (م) = $\left(\frac{س_1+س_2+س_3}{3}، \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3}، \frac{ع_1+ع_2+ع_3}{3}\right)$

أ / حسام ميرة

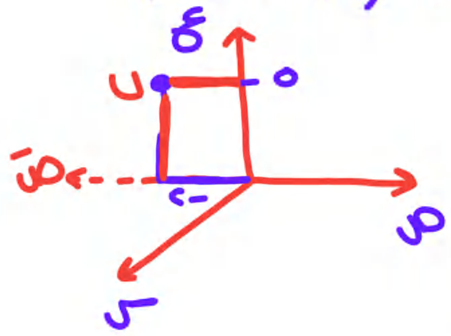
م (٠،٦،٣)



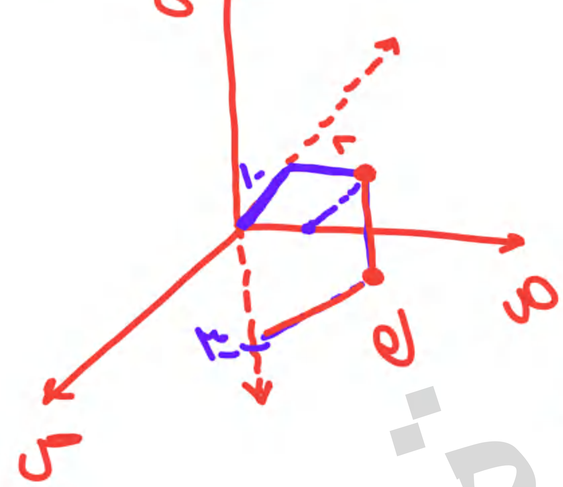
ب (٤،٣،٢)



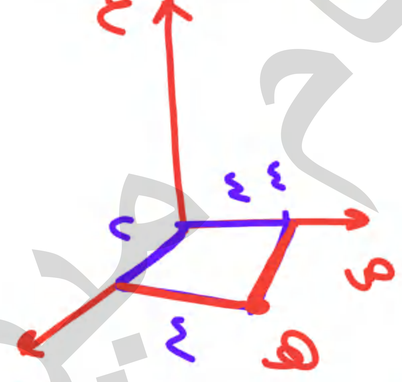
ن (٥،٢-،٠)



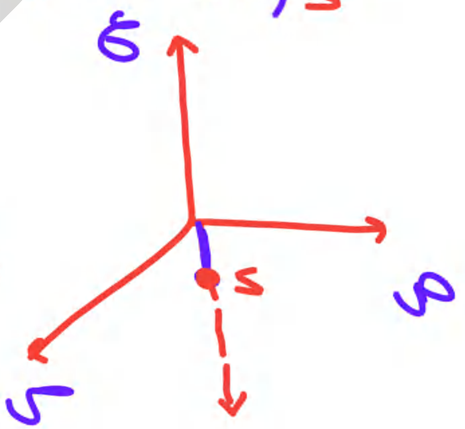
ل (-١،٢،٣-)



هـ (٠،٤،٢)



و (١-،٠،٠)



النقط فى ثلاثى البعد :-

١ ∋ لمحور

٢ ∋ لمستوى

٣ الفراغ

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة مستوى يحوى جميع نقط الفراغ

(س ، ص ، ع) مستوى // س ص ← ع = م معادلته

(٢ ، ٤ ، ٥) (١- ، ٤ ، ٥) (٢ ، ٤- ، ٥)

ع = ٥

(س ، ص ، م) // س ع ← ص = م

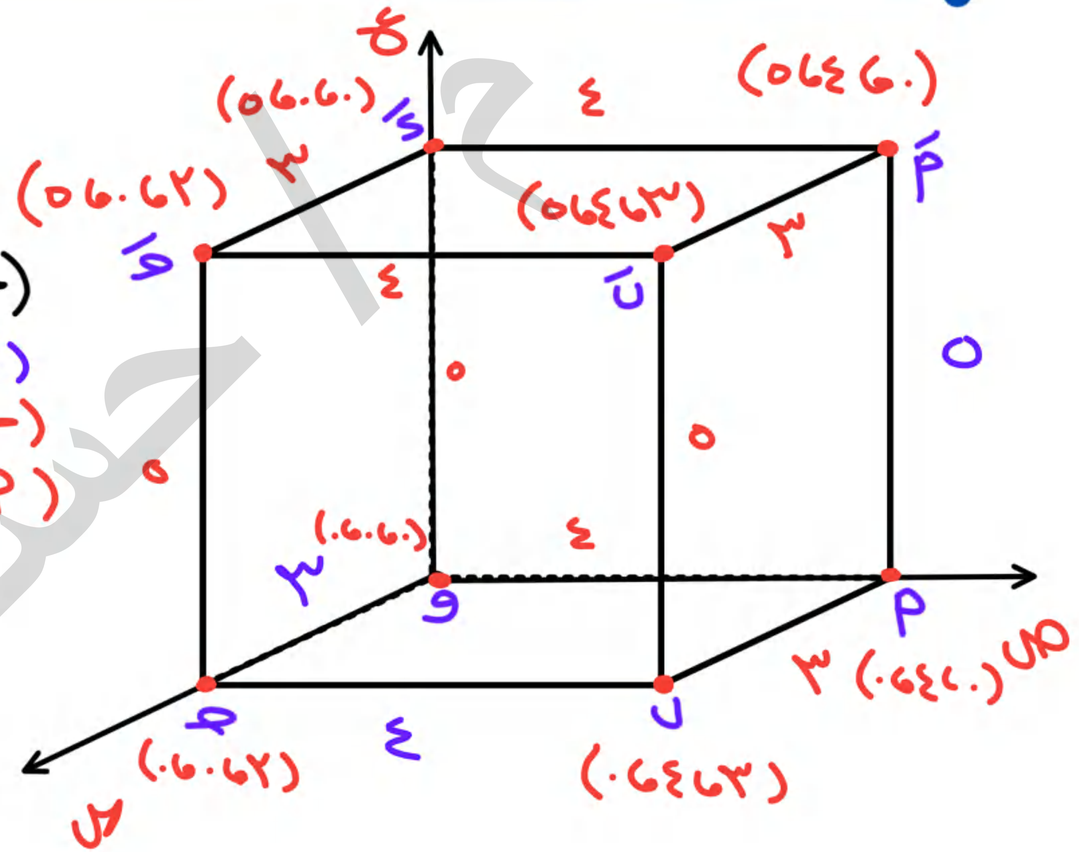
(س ، م ، ع) // ص ع ← س = م

دوران ١٨٠° نقطة ← انعكاس بالنسبة لنقطة الأصل

(٢- ، ٤- ، ٥-) ← (٢ ، ٤ ، ٥-)

دوران ١٨٠° حول المستوى (س ص) ←

انعكاس (س ص) ← (٢ ، ٤- ، ٥)



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

لاستخدام قانون البعد :-

(١) اثبات ان النقط أ ، ب ، ج ، د تقع على استقامة واحدة

الطريقة (١) نوجد الابعاد أب ، ب ج ، أ ج

(٢) مجموع اصغر بعدين = البعد الثالث

(٢) تحديد نوع المثلث من حيث أضلاعه

الطريقة (١) نوجد الابعاد أب ، ب ج ، أ ج

(٢) نقارن الابعاد اذا كانت :-

أب = ب ج = أ ج ← Δ متساوي الاضلاع

أب = ب ج ≠ أ ج ← Δ متساوي الساقين

أب ≠ ب ج ≠ أ ج ← Δ مختلف الاضلاع

م = $\frac{|٣ س_{٢} + ٤ ص_{٢}|}{٤}$

(٣) تحديد نوع المثلث من حيث زواياه

الطريقة (١) نوجد الابعاد الثلاثة أب ، ب ج ، أ ج

(٢) نقارن مربعات الابعاد اذا كانت :-

(أب)^{٢} = (ب ج)^{٢} + (أ ج)^{٢} ← قائم ∠ جـ

(أب)^{٢} > (ب ج)^{٢} + (أ ج)^{٢} ← منفرج ∠ جـ

(أب)^{٢} < (ب ج)^{٢} + (أ ج)^{٢} ← حاد الزوايا

(٤) تحديد نوع الشكل الرباعي (توجد اطوال + قطريه)

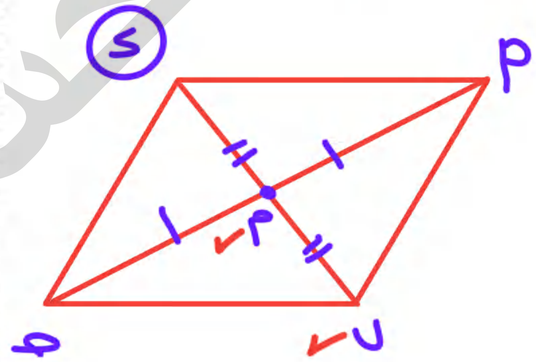
مربع	مستطيل	معين	متوازي أضلاع	شبه منحرف
٤ أضلاع	٢ ضلع	٤ أضلاع	٢ ضلع	ضلعين متوازيين
قطريه	قطريه	قطريه X	قطريه X	ضلعين X

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

← في اي شكل رباعي :-

يكون اصداث النقطة لرابعة ولتليه (ك)

$$ك = ب + د - ا$$



$$ا = ب + د - ك$$

$$ب = ا + د - ك$$

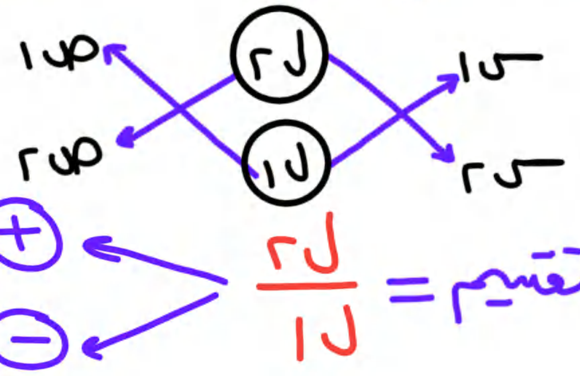
$$د = ا + ب - ك$$

← تقسيم قطعة مستقيمة :-

$$(س_1 ، ص_1)$$
$$(س_2 ، ص_2)$$

$$(س ، ص) = \left(\frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_2 + ل_1} ، \frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_2 + ل_1} \right)$$

نقطة التقسيم



$$\text{نسبة التقسيم} = \frac{ل_2}{ل_1}$$

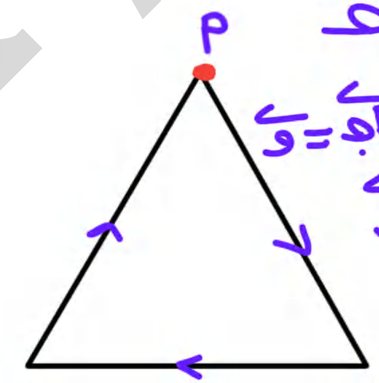
$$(س ، ص ، ع) = \left(\frac{ل_1 س_2 + ل_2 س_1}{ل_2 + ل_1} ، \frac{ل_1 ص_2 + ل_2 ص_1}{ل_2 + ل_1} ، \frac{ل_1 ع_2 + ل_2 ع_1}{ل_2 + ل_1} \right)$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تأكد من مجهاتك مهم جداً جداً :-

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

أو $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

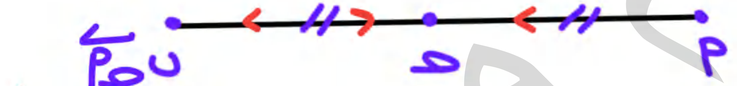
متوازي

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

k ← نفس الاتجاه

k ← عكس //

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

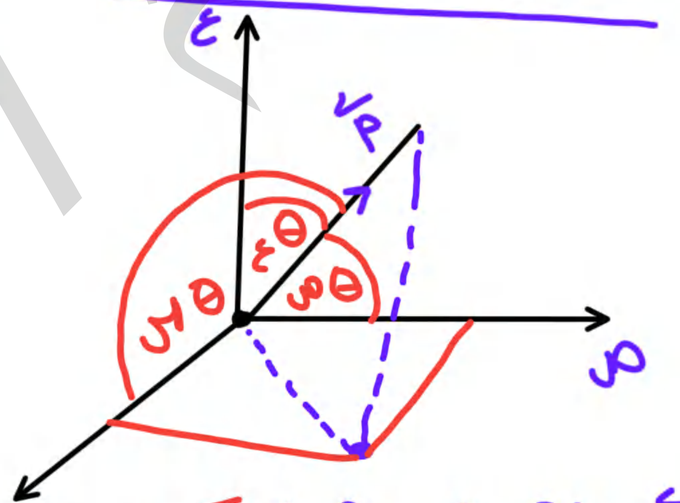
هـ منتصف $\overline{AB}$ فإن $\overrightarrow{AB} = (-2, 6, 4)$

$\overrightarrow{AH} = (-2, 6, 4)$

$\overrightarrow{BH} = (-6, 2, -4)$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المتجهات في الفراغ :-



$\vec{P} = (P_س ، P_ص ، P_ع)$ مركبات

① مقدار المتجه $|| \vec{P} || = \sqrt{(P_س)^2 + (P_ص)^2 + (P_ع)^2}$

② مركبات المتجه $\vec{P}$ $P_س$ ، $P_ص$ ، $P_ع$

③ زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{P}$ $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ $\in [0° ، 180°]$

خواص المقدار :-

① $|| \vec{P} || \geq$ صفر

② $|| \lambda \vec{P} || = |\lambda| \, || \vec{P} ||$

③ $|| \vec{P} + \vec{ب} || \leq || \vec{P} || + || \vec{ب} ||$

$= 0 =$ صفر من نفس الاتجاه

$|| \vec{P} - 2\vec{P} || = |-2| \, || \vec{P} ||$

$= 2 \, || \vec{P} ||$

$|| \lambda \vec{P} || = |\lambda| \, || \vec{P} ||$

$-2 || \vec{P} || = -2 || \vec{P} ||$

تساوى متجهين :-

$\vec{P} = (P_س ، P_ص ، P_ع)$

$\vec{U} = (U_س ، U_ص ، U_ع)$

وكان $\vec{P} = \vec{U}$

فإن :- $P_س = U_س$

$P_ص = U_ص$

$P_ع = U_ع$

متجه الوحدة :-

(١) متجهات الوحدة الاساسية $\vec{س}$ (١ ، ٠ ، ٠)

$\vec{ص}$ (٠ ، ١ ، ٠)

$\vec{ع}$ (٠ ، ٠ ، ١)

(٢) هو متجه مقياسه = ١ ($\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٥}$ ، ٠)

(٣) $\vec{ك}_{\vec{P}} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}$ (متجه له نفس اتجاه $\vec{P}$ بس مقياسه = ١)

وليه نفس زوايا الاتجاه

$\vec{P} \parallel \vec{ك}_{\vec{P}}$

$\vec{ك}_{\vec{P}} \parallel \vec{P}$

$\vec{ك}_{\vec{ب}} \parallel \vec{ب}$

$\vec{ق} \parallel \vec{ك}_{\vec{م}}$ ← قوة $\vec{ق}$ تعمل فى اتجاه $\vec{م}$

$\vec{ك}$ يعمل فى اتجاه $\vec{م}$ ← $\vec{ك} \parallel \vec{ك}_{\vec{م}}$

التعبير عن المتجه :-

$(٦٣ - ٥٦٤) = ٣\vec{س} - ٤\vec{ص} + ٥\vec{ع}$

$(٠٦٣ - ٠٦٠) = -٣\vec{ص}$

$(٢٦٠٦٥ -) = ٥\vec{ع} - ٢\vec{ع}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

زوايا الاتجاه وجيوب تمام زوايا الاتجاه :-

(١) زوايا الاتجاه $\vec{P}$ هي $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$

حيث $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع \in [0 ، \pi]$

(٢) جيوب تمام زوايا الاتجاه $\vec{P}$

$(\text{جتا}\theta_س ، \text{جتا}\theta_ص ، \text{جتا}\theta_ع)$

جيوب تمام زوايا الاتجاه المتجه $\vec{P}$ = $\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}$ = $(\vec{ك})$ متجه الوحدة في اتجاه $\vec{P}$

(٣) $\vec{P} = \|\vec{P}\| \vec{ك}$

$= \|\vec{P}\| (\text{جتا}\theta_س ، \text{جتا}\theta_ص ، \text{جتا}\theta_ع)$

(٤) إذا كان المتجه يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

فإن $\theta_س = \theta_ص = \theta_ع = \theta$

$\text{جتا}^2\theta_س + \text{جتا}^2\theta_ص + \text{جتا}^2\theta_ع = 1$

$\therefore \text{جتا}\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = 54° 44'$ ← ← $\theta = 125° 15'$

ومنه $a^2_س + a^2_ص + a^2_ع = 2$

$\text{جتا}^2 2\theta_س + \text{جتا}^2 2\theta_ص + \text{جتا}^2 2\theta_ع = -1$ $(\because \text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^2(90° + \theta) + \text{جتا}^2\theta = 1)$

ومنه الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{P}$ مع المحاور

محور س = $\frac{P_س}{\|\vec{P}\|}$ = $\text{جتا}\theta_س$

محور ص = $\frac{P_ص}{\|\vec{P}\|}$ = $\text{جتا}\theta_ص$

محور ع = $\frac{P_ع}{\|\vec{P}\|}$ = $\text{جتا}\theta_ع$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات زوايا الاتجاه :-

(١) لو اعطى زاويتيه ومطلوب الزاوية الثالثة

$\leftarrow$ جتا^2 θ س + جتا^2 θ ص + جتا^2 θ ع = ١

(٢) لو مجموع زاويتيه ٩٠° فإنه متمم الثالثة = ٩٠°

θ س + θ ص = ٩٠° $\leftarrow$ θ ع = ٩٠°

وهكذا

طيب لو القاس فيه زاوية = ٩٠°

(٣٠°، ٦٠°، ٩٠°) (θ ع، θ ص، θ س)

θ ع = ٦٠° ، ١٢٠°

لو θ ص = ٩٠° $\leftarrow$ يقع في المستوى ص ع

θ س = θ ص = ٩٠° $\leftarrow$ يقع على محور ع

(٣) مجموع قياسا زاويتيه اتجاه $\geq$ ٩٠°

جتا^2 θ س = ١

جتا θ س = $\pm$ ١

θ س ← ٠° ، ١٨٠°

س$^+$ ← (١، ٠، ٠) ← (٠°، ٩٠°، ٩٠°)

س$'$ ← (-١، ٠، ٠) ← (١٨٠°، ٩٠°، ٩٠°)

(٤) جيوب تمام الاتجاه للمحاور وزواياه لاتجاه

ص$^+$ ← (٠، ١، ٠) ← (٩٠°، ٠°، ٩٠°)

ص$'$ ← (٠، -١، ٠) ← (٩٠°، ١٨٠°، ٩٠°)

ع$^+$ ← (٠، ٠، ١) ← (٩٠°، ٩٠°، ٠°)

ع$'$ ← (٠، ٠، -١) ← (٩٠°، ٩٠°، ١٨٠°)

⊙ إذا كان (ﺱ، ص، ع) زوايا الاتجاه لـ $\overrightarrow{ك}$

فإن لـ $\overrightarrow{ك}$ =

لـ > صفر ← زوايا ← (ﺱ، ص، ع)

لـ < صفر ← زوايا ← $(\pi-ﺱ، \pi-ص، \pi-ع)$

٦ الزاوية التي يصنعها المتجه مع مستويات الإحداثيات

$\overrightarrow{ك}$ ← ﺱ ص، ص ع، ع ص

ﺱ ص ← $\overrightarrow{ك}$ ← $ﺱ\theta - ٩٠$

ص ع ← $\overrightarrow{ك}$ ← $ص\theta - ٩٠$

ع ص ← $\overrightarrow{ك}$ ← $ع\theta - ٩٠$

ملاحظات لمتشابهة عمد المتجهات :-

$\overrightarrow{ك} \neq \overrightarrow{ب} \neq \overrightarrow{ﺟ}$

$\|\overrightarrow{ك}+\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{ك}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ ✓ θ = صفر

$\|\overrightarrow{ك}+\overrightarrow{ب}\|^{٢} = \|\overrightarrow{ك}\|^{٢} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$ ✓ $\theta = ٩٠^{\circ}$

$\|\overrightarrow{ك}+\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{ك}-\overrightarrow{ب}\|$ ✓ $\theta = ٩٠^{\circ}$

لو ﻫ ، ﻭ متجهين متوازيين في الفراغ

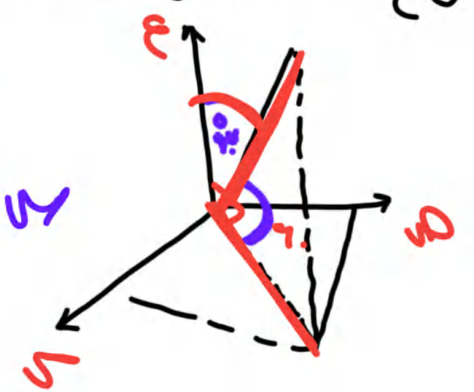
لنفس الاتجاه ← لنفس زوايا الاتجاه

متضادين في الاتجاه ← ١٨٠° − زوايا الآخر

$ع\theta = ٣٠$

$ص\theta = ٣٠ - ٩٠$

$= ٦٠^{\circ}$



الضرب القياسى :-

$\vec{P} \cdot \vec{U} = |\vec{P}| \, |\vec{U}| \, \text{جتا}\theta$ $\quad \theta \in [0 , \pi]$ الناتج (رقم)

$= س_1 س_2 + ص_1 ص_2 + ع_1 ع_2$ اماثيان

خواص :-

① $\vec{P} \cdot \vec{U} = \vec{U} \cdot \vec{P}$

② $ل(\vec{P} \cdot \vec{U}) = ل \vec{P} \cdot ل \vec{U}$

③ $\vec{P} \cdot (\vec{U} + \vec{ك}) = \vec{P} \cdot \vec{U} + \vec{P} \cdot \vec{ك} = \vec{U} \cdot \vec{P} + \vec{ك} \cdot \vec{P}$

④ $\vec{P} \cdot \vec{P} = |\vec{P}|^2$ $\quad$ لان θ = صفر ← جتا صفر = ١

⑤ $(\vec{P} + \vec{U}) \cdot (\vec{P} + \vec{U}) = |\vec{P}|^2 + |\vec{U}|^2 + \vec{U} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{U}$

$2 \vec{P} \cdot \vec{U}$

$$|\vec{P}+\vec{Q}| = \sqrt{(\vec{P}+\vec{Q})\cdot(\vec{P}+\vec{Q})}$$

$$= \sqrt{|\vec{P}|^2+|\vec{Q}|^2+2\vec{P}\cdot\vec{Q}}$$

$$= \sqrt{|\vec{P}|^2+|\vec{Q}|^2+2|\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta}$$

ومنه:-

$$|\vec{P}-\vec{Q}| = \sqrt{|\vec{P}|^2+|\vec{Q}|^2-2\vec{P}\cdot\vec{Q}}$$

$$|\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}| = \sqrt{|\vec{P}|^2+|\vec{Q}|^2+|\vec{R}|^2+2\vec{P}\cdot\vec{Q}+2\vec{Q}\cdot\vec{R}+2\vec{P}\cdot\vec{R}}$$

$$\vec{s}\cdot\vec{s} = \vec{m}\cdot\vec{m} = \vec{g}\cdot\vec{g} = 1$$

ملاحظة مهمة جدًا:-

اذا كان $\vec{P}\cdot\vec{Q}$ = صفر

$\therefore \vec{P}\perp\vec{Q}$ (أو) $\vec{P}=\vec{0}$ أو $\vec{Q}=\vec{0}$

ومنه:-

$$\vec{s}\cdot\vec{m} = \vec{m}\cdot\vec{g} = \vec{s}\cdot\vec{g} = \text{صفر}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

استخداماته:

(١) الزاوية بين متجهين

$$\text{جتا}\theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{ت}}{|\vec{P}| \, |\vec{ت}|}$$

$\vec{P} \cdot \vec{ت}$ > صفر [حادة]

$\vec{P} \cdot \vec{ت}$ < صفر [منفرجة]

$\vec{P} \cdot \vec{ت}$ = صفر [٩٠]

يمكن استخدامها لإيجاد زاوية من أي شكل

(٢) المركبة الجبرية (مسقط متجه في اتجاه متجه آخر)

$$\text{م}_{\vec{ت}} = |\vec{P}| \, \text{جتا}\theta$$

$$= \frac{\vec{P} \cdot \vec{ت}}{|\vec{ت}|}$$

مركبة $\vec{P}$ في اتجاه $\vec{ت}$ لجهة $\vec{ت}$ ( )

(٣) المركبة الاتجاهية

$$\vec{\text{م}}_{\vec{ت}} = \left(\frac{\vec{ت}}{|\vec{ت}|}\right)\left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{ت}}{|\vec{ت}|}\right) \vec{ت}$$

$$= \frac{\vec{P} \cdot \vec{ت}}{|\vec{ت}|^2} \vec{ت}$$

④ الشغل المبذول من قوة :- (ديناميكا)

اذا اثرت قوة ثا جسم فحركته ازاحة ف فإننا نقول ان هذه القوة بذلت شغل

$$\text{شغل} = \vec{ق} \cdot \vec{ف}$$
$$= |\vec{ق}| \, |\vec{ف}| \, \text{جتا}\theta$$

وحدات الشغل نيوتن.متر ← جول

دايين.سم ← إرج

ملاحظات خطيرة جدًا :-

① $\vec{P}$ ما $\vec{ت}$ متجهين وحدة فإن $\vec{P} \cdot \vec{ت} \in [-1 ، 1]$

② اذا كان $\vec{P}$ ما $\vec{ت}$ متجهين وحدة قياس الزاوية بينهما θ فإن $\vec{P} + \vec{ت}$ يكون متجهين وحدة اذا كانت $\theta = \frac{2\pi}{3}$

③ اذا كان $\vec{هـ} = \vec{P} + \vec{ت}$ وكان $\vec{هـ} \perp \vec{ت}$

$\vec{ت} = \vec{P} - \vec{ت}$

فإن $|\vec{P}| = |\vec{ت}| = |\vec{هـ}|$

④ $\vec{P} \cdot \vec{س} = |\vec{P}| \, |\vec{س}| \, \text{جتا}\theta$

$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{س}{|\vec{P}|} = \frac{س}{1} = س$

الضرب الاتجاهي :-

$\vec{ب} \times \vec{أ} = (\vec{ك}) \, |\vec{أ}| \, |\vec{ب}| \, \sin\theta$

متجه وحدة تعامدي المستوى

الناتج متجه $\perp$ لكل المستوى الذي يحوي المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

وأيضاً هيكون محتوى في اي متجه اخر داخل المستوى

$\therefore \vec{أ} \cdot (\vec{ب} \times \vec{أ}) = $ صفر

$\vec{ب} \cdot (\vec{أ} \times \vec{ب}) = $ صفر

$|\vec{أ} \times \vec{ب}| = |\vec{أ}| \, |\vec{ب}| \sin\theta$

$$\vec{أ} \times \vec{ب} = \begin{vmatrix} \vec{ك}^{+} & \vec{ج}^{-} & \vec{ت}^{+} \\ ج_{ع} & ج_{ص} & ج_{س} \\ ب_{ع} & ب_{ص} & ب_{س} \end{vmatrix}$$

ثلاثي الابعاد

$\vec{أ} \times \vec{ب} = (س_{1} ص_{2} - ص_{1} س_{2}) \vec{ع}$ (ثنائي البعد)

ومنه :-

$\vec{س} \times \vec{س} = \vec{ص} \times \vec{ص} = \vec{ع} \times \vec{ع} = \vec{ك}$

$\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$

$\vec{ص} \times \vec{ع} = \vec{س}$

$\vec{ع} \times \vec{س} = \vec{ص}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

خواصه:

① $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

② $ل(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) = ل\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times ل\overrightarrow{ب}$

③ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ج}$ ← $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ج} // \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ج}$

ومنه اذا كان $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$

* $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$
* $\overrightarrow{أ} = ل\overrightarrow{ب}$ $ل \neq$ صفر
* $\frac{أ_1}{ب_1} = \frac{أ_2}{ب_2} = \frac{أ_3}{ب_3}$

④ $\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ}$

تخرجاته:

① $\frac{||\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}||}{||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}||} = جا\theta$ $\quad$ $\frac{\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{أ}|| \, ||\overrightarrow{ب}||} = جتا\theta$

$\therefore \frac{||\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}||}{\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}} = ظا\theta$

② متجه متجهي عمودي علي $(ى) = \overrightarrow{ى} = \pm \frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}||}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الضرب الثلاثى القياسى :-

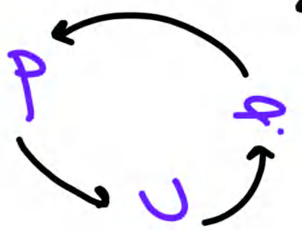
$\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ})$ ← ده لازم أولاً

$$\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) = \begin{vmatrix} س_{أ} & ص_{أ} & ع_{أ} \\ س_{ب} & ص_{ب} & ع_{ب} \\ س_{جـ} & ص_{جـ} & ع_{جـ} \end{vmatrix}$$

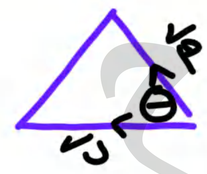
خواصه :-

① $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{جـ}$

② $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{ب} \cdot (\overrightarrow{جـ} \times \overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{جـ} \cdot (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

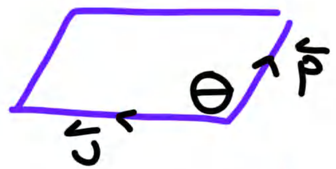


③ مساحة المثلث



$م_{\triangle} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|$

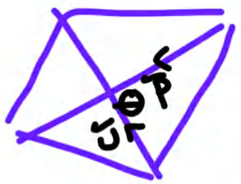
④ مساحة متوازى الأضلاع



$م_{\square} = \| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|$

لازم ضلعين متجاورين

⑤ المثل الرباعى



$م = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

لستخراتة:-

① حجم متوازى الطوح الذى فيه ٣ احرف متجاورة

$$ح = |\vec{ك} \times \vec{ب} \cdot \vec{أ}|$$

ارتفاع متوازى الطوح بيث قاعدته $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

$$ع = \frac{|\vec{ك} \times \vec{ب} \cdot \vec{أ}|}{\|\vec{ب} \times \vec{أ}\|}$$

② حجم الهرم الرباعى $= \frac{1}{3} |\vec{ك} \times \vec{ب} \cdot \vec{أ}|$

" " الثلاثى $= \frac{1}{6} |\vec{ك} \times \vec{ب} \cdot \vec{أ}|$

③ اذا كانت المتجهات $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ك}$ فى مستوى واحد

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{ك} = \text{صفر}$$

وهاى ماهاى ٤ نقط

ملاحظات مهمة جدًا:-

① $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهين وجهة ما

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \in [-١٦ ، ١٦]$$

$$\vec{أ} \times \vec{ب} \in [٠ ، ١٦]$$

② اذا كان $\vec{أ} + \vec{ب} = \vec{ك}$

$$\vec{أ} = -\vec{ب}$$

$$\vec{ب} = -\vec{أ}$$

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

أولا معادلة المستقيم في الفراغ

نقطة على المستقيم P (س١ ، ص١ ، ع١)

متجه اتجاه المستقيم هو (أ ، ب ، جـ)

متجه اتجاه المستقيم (هـ) :-

① مصطحبا مباشرة

② زوايا الاتجاه هي (θس ، θص ، θع)

③ نسب الاتجاه هي = نسب لإتجاه

④ نقطتين على المستقيم P ، Q

هـ = $\overrightarrow{PQ}$ أو هـ = $\overrightarrow{QP}$

⑤ مستقيم // المستقيم المطلوب ⟹ هـ مطلوب = هـ معطى

⑥ المستقيم // محور س ⟹ هـ = (١ ، ٠ ، ٠)

المستقيم // محور ص ⟹ هـ = (٠ ، ١ ، ٠)

المستقيم // محور ع ⟹ هـ = (٠ ، ٠ ، ١)

⑦ مستقيم يصنع زوايا متساوية مع المحاور هو (١ ، ١ ، ١)

ملاحظات :

- يمكنه ضرب هـ في اى رقم حقيقي عدا الصفر (ح*)
- زوايا اتجاه المستقيم = زوايا اتجاه هـ
- الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محاور الاحداثيات هي (θس ، θص ، θع)

$$\text{جتا}\theta_{س} = \frac{\text{م}_{س}}{\|\text{هـ}\|} \quad ، \quad \text{جتا}\theta_{ص} = \frac{\text{م}_{ص}}{\|\text{هـ}\|} \quad ، \quad \text{جتا}\theta_{ع} = \frac{\text{م}_{ع}}{\|\text{هـ}\|}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم :-

① متجهة : $\vec{ر} = \vec{أ} + ل\vec{ك}$

② بارامترية :
$$س = ١ + ٣ل$$
$$ص = ٣ + ل$$
$$ع = ٤ + ٢ل$$

③ اصطلاحية : $$\frac{س-١}{٣} = \frac{ص-٣}{١} = \frac{ع-٤}{٢}$$

ملاحظات :-

$س = ٢ - ٣ل$ ، $ص = -١ + ل$ ، $ع = ٤ + ٢ل$

$\vec{أ} = (٢ ، -١ ، ٤)$

$\vec{ك} = (-٣ ، ١ ، ٢)$

$٣س + ص = ٥$ ، $٦ع = ١٢$

$\vec{أ} = (٠ ، ٦ ، ١٢)$ ، $ل = \frac{ع}{٦} = \frac{١٢}{٦}$

$\vec{ك} = (-٦\frac{١}{٢} ، ١ ، ٠)$ ، $\vec{ر} = (٠ ، ٦ ، ١٢) + ل(-٦\frac{١}{٢} ، ١ ، ٠)$

$\frac{س-١}{٣} = \frac{ص-١}{-٤} = \frac{ع-٥}{٧}$

$\vec{أ} = (١ ، ١ ، ٥)$ ، $\vec{ك} = (٣ ، -٤ ، ٧)$

$\vec{ر} = (١ ، ١ ، ٥) + ل(٣ ، -٤ ، ٧)$

$\vec{أ} = (١٫٥ ، ١٫٤ ، ٥٫٩)$ ، $\vec{ك} = (٦ ، ٥ ، ٤)$

$\vec{ر} = (١٫٥ ، ١٫٤ ، ٥٫٩) + ل(٦ ، ٥ ، ٤)$

$\frac{س-١٫٥}{٦} = \frac{ص-١٫٤}{٥} = \frac{ع-٥٫٩}{٤} = ل$

ملاحظات خطية :

المستقيم // س ص

$\vec{هـ} = (ل_1، ل_2، ل_3)$

$س = س_1 + ا ل$ ، $ص = ص_1 + ب ل$ ، $ع = ع_1$

مثال

$س = ٢ - ٣ل$

$ص = ٥ + ٢ل$

$ع = ٣$

$\frac{س - ٢}{-٣} = \frac{ص - ٥}{٢} = ع = ٣$

$(٣، ٦، ٢)$

$\vec{هـ} = (-٣، ٢، ٠)$

// س ص

المستقيم // محور س

$\vec{هـ} = (ل_1، ل_2، ل_3)$

$\vec{ر} = (س_1، ص_1، ع_1) + ل (ل_1، ل_2، ل_3)$

$س = س_1 + ا ل$ ، $ص = ص_1$ ، $ع = ع_1$

مثال

$ص = ٣$ ، $ع = ٥$ // محور س

$س = -٢$ ، $ع = ٤$ // محور ص

$ص = ٧$ ، $س = -٥$ // محور ع

مستقيم مار بنقطة الأصل :

$\vec{ر} = ل \vec{هـ}$

$س = ا ل$ ، $ص = ب ل$ ، $ع = ج ل$

$\frac{س}{ا} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{ج}$

$س = ٥ل$ ، $ص = -٢ل$ ، $ع = ٣ل$

$\frac{س}{٥} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع}{٣}$

حساب

معادلة المستقيم :-

① نقطة $\overleftarrow{P}$ / هـ مباشرة ⟵ $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{P} + ل\overleftarrow{هـ}$

② نقطتين P ، ب ⟵ $\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{Pب}$ ⟵ $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{P} + ل\overleftarrow{هـ}$

③ نقطة P ويقطع ∩ محور س جزء طوله ٥ ⟵ ب (٥، ٠، ٠) ⟵ $\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{Pب}$ ⟵ $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{P} + ل\overleftarrow{هـ}$

④ نقطة $\overleftarrow{ب}$ ويوازي متجه $\overleftarrow{P}$ ⟵ $\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{P}$ ⟵ $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{ب} + ل\overleftarrow{هـ}$

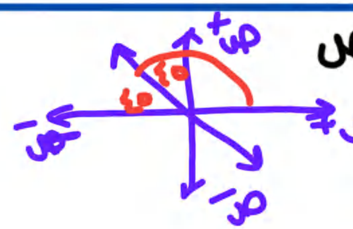
⑤ نقطة $\overleftarrow{P}$ وزوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة للمحاور ⟵ $\overleftarrow{هـ} = (١، ١، ١)$

⑥ مار بنقطة (P) ويوازي مستقيم مار بالنقطتين ب / جـ ⟵ $\overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{بجـ}$ ⟵ $\overleftarrow{ك} = \overleftarrow{P} + ل\overleftarrow{هـ}$

⑦ مار بنقطة يوازي مستقيم ⟵ متجهة باراميترية / اصطلاحية ⟵ $\overleftarrow{هـ}$

f D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

(٨) نقطة ويوازى منصف الربع الثانى صه المستوى س ص ص



$\theta_{س} = ١٣٥°$

$\theta_{ص} = ٤٥°$

$\vec{ك} = (\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠)$

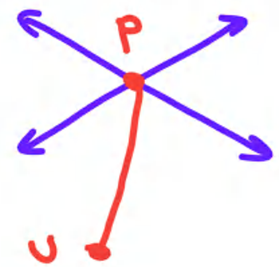
$= (-٠٫٧٠٧، ٠٫٧٠٧، ٠)$

(٩) مستقيم عمودى على مستقيمين

$\vec{ك} = \vec{هـ_١} \times \vec{هـ_٢}$

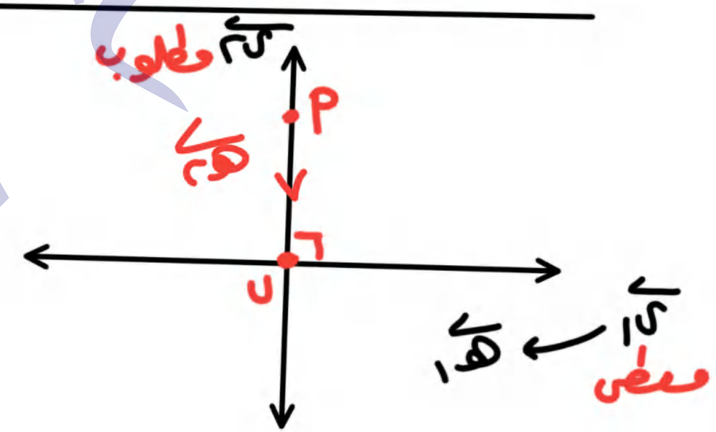
(١٠) نقطة ونقطة تقاطع مستقيمين

$\vec{ك} = \vec{ب ب}$



صام ميرة

معادلة مستقيم مار بنقطة ويقطع مستقيم في التعامد :-



- نجعل (ن) من الصورة البارامترية
- نكون $(\overrightarrow{ق P})$
- $\overrightarrow{ق P} \cdot \overrightarrow{هـ_1} =$ صفر
- نحسب قيمة ل
- $\overrightarrow{ق P} = \overrightarrow{هـ_2}$
- $\overrightarrow{ك_2} = \overrightarrow{ق} + ل \overrightarrow{هـ_2}$

حسام حميدة

الزاوية بين مستقيمين :-

$\overrightarrow{هـ_1} = (ب_1 ، جـ_1 ، د_1)$

$\overrightarrow{هـ_2} = (ب_2 ، جـ_2 ، د_2)$

$$جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{هـ_1} . \overrightarrow{هـ_2}|}{||\overrightarrow{هـ_1}|| \, ||\overrightarrow{هـ_2}||}$$

$$= \frac{|ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 + د_1 د_2|}{\sqrt{ب_1^2 + جـ_1^2 + د_1^2} \times \sqrt{ب_2^2 + جـ_2^2 + د_2^2}}$$

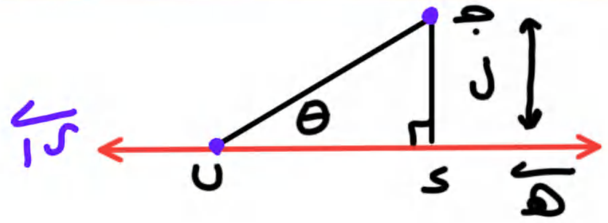
- إذا كان جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين :-

$(ل_1 ، م_1 ، ن_1)$ ، $(ل_2 ، م_2 ، ن_2)$

$$جتا\theta = |ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$$

حسام ميرة

طول العمود المرسوم من نقطة على المستقيم:-



① $\overleftrightarrow{ك هـ}$ // $\overleftrightarrow{ل س}$

$$ل س = \frac{|\overrightarrow{ك ل} \cdot \overrightarrow{ك هـ}|}{\|\overrightarrow{ك هـ}\|}$$

$$د(ل س) = \sqrt{\|\overrightarrow{ك ل}\|^2 - (ل س)^2}$$

② $\overleftrightarrow{ك هـ}$ // $\overleftrightarrow{ل س}$

$$\text{جا}\theta = \frac{|\overrightarrow{ك ل} \cdot \overrightarrow{ك هـ}|}{\|\overrightarrow{ك ل}\| \|\overrightarrow{ك هـ}\|}$$

$$د(ل س) = ل ج \text{ جا}\theta$$

③ س ← صورة بارامترية

$\overrightarrow{ك س}$ ⊥ المستقيم

$\overrightarrow{ك س} \cdot \overrightarrow{ك هـ}$ = صفر

- نعوض بقيمة ك

- نوجد (س)

- $\|\overrightarrow{ك س}\|$

④

$$\|\overrightarrow{ك ل} \times \overrightarrow{ك هـ}\| = \|\overrightarrow{ك ل}\| \|\overrightarrow{ك هـ}\| \text{ جا}\theta$$

$$ل = \|\overrightarrow{ك ج}\| \text{ جا}\theta$$

$$\|\overrightarrow{ك ل} \times \overrightarrow{ك هـ}\| = ل \|\overrightarrow{ك هـ}\|$$

$$ل = \frac{\|\overrightarrow{ك ل} \times \overrightarrow{ك هـ}\|}{\|\overrightarrow{ك هـ}\|}$$

ملاحظة قبل ما تعوض البعد بالتعويض في معادلة المستقيم ← (حقيقة / معادلة) ل = صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

- تطبيعه مهم جداً :-

- نب $\overleftrightarrow{ل ك}$ = هـ ك

- نب طول العمود المرسوم من (P) على المستقيم $\overleftrightarrow{ل ج}$

- ا ل ك ك ا ا

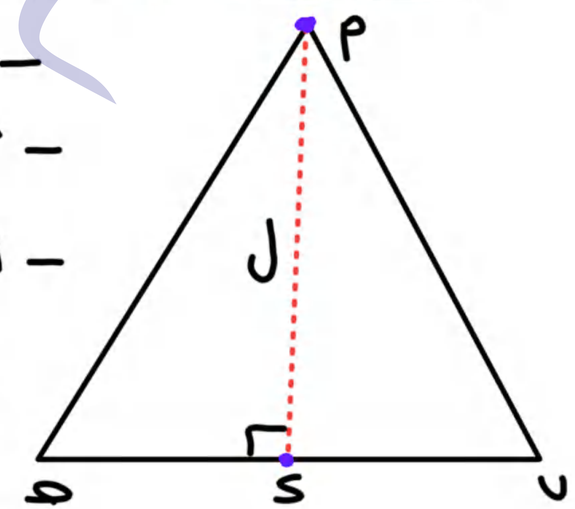
م (٢٦٥٦٢)

(٢٦١-٦١)

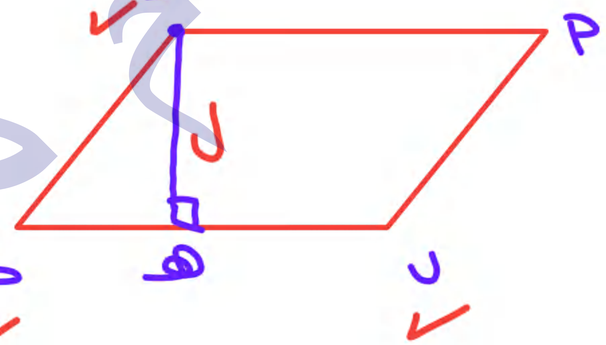
(٢٦١-٦١) ص

(٢٦٥-٦٢) ب

م ∆ ل ك = ½ ا ل ك ك ا ا × ل

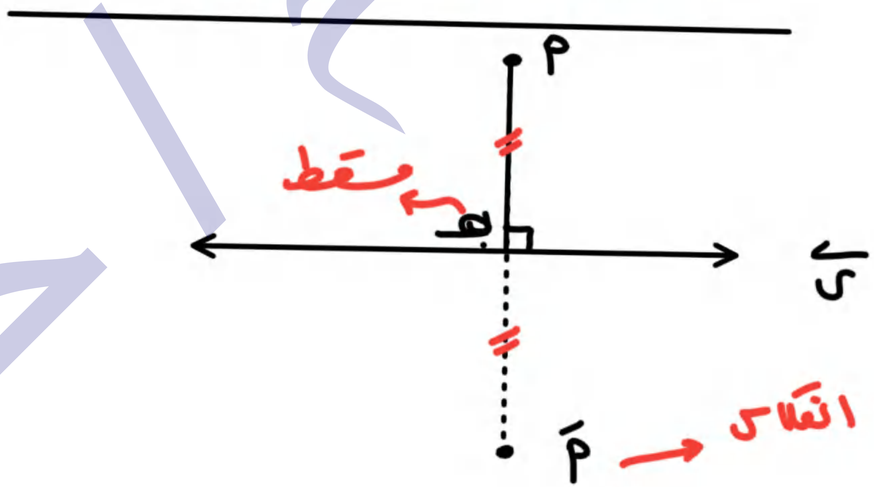


المطلوب م ∆ P ب جـ



D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

سقط نقطة على مستقيم والانعكاس:-



① نجعل معادلة المستقيم على الصورة البارامترية

$س = س_1 + ا_1 ل$ $ص = ص_1 + ب_1 ل$ $ع = ع_1 + جـ_1 ل$

② السقط (جـ) ∈ المستقيم

$جـ = (س_1 + ا_1 ل ، ص_1 + ب_1 ل ، ع_1 + جـ_1 ل)$

③ $\overrightarrow{Pجـ} \cdot \overrightarrow{ك} =$ صفر

- نحل منه على قيمة ل ← نحل على (جـ)

④ صورة P بالانعكاس في المستقيم (P')

$$P' = 2جـ - P$$

حسام ميرة

علاقة مستقيمات :-

① مستقيمات متوازية / متقاطعة
(تجمعهم مستوى واحد)

② مستقيمات متعامدة

- متقاطعة (لا تجمعهم مستوى واحد)
- متقاطعة (تجمعهم مستوى واحد) / متعامدة

البعد بين مستقيمات متوازية :-

م ∉ ك١ ، ك٢

ك١ // ك٢

م ∉ ك١ ، ك٣

ك١ // ك٣

ك١ = ل ∩ هـ١

ك٢ = ل ∩ هـ٢

ل ≠ صفر

- نصل م نقطة من المستقيم الأول

- نحسب البعد بينها وبين المستقيم الثاني "البعد ثابت لأنهم متوازية"

صام ميرة

المستقيمات المتقاطعة :-

$\overleftrightarrow{هـ_1} = (أ_1 + ل_1 ك ، ب_1 + م_1 ك ، جـ_1 + ن_1 ك)$

$\overleftrightarrow{هـ_2} = (أ_2 + ل_2 ك ، ب_2 + م_2 ك ، جـ_2 + ن_2 ك)$

$ل_1 \perp ل_2$

$\therefore \overleftrightarrow{هـ_1} \cdot \overleftrightarrow{هـ_2} = صفر$

المستقيمات المتوازية :-

$\overleftrightarrow{هـ_1} = ل \overleftrightarrow{هـ_2}$

لو اعطى مقدار احدهما ويقصد الاخر

$\overleftrightarrow{هـ_1} \times \overleftrightarrow{هـ_2} = ك$

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$

حالة المجهول

$ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2 = صفر$

صام ميرة

المستقيمات المتقاطعة :- (نقطة التقاطع) والمتخالفة

① نوجد المعادلات البارامترية لكل مستقيم

② نساوى س١ = س٢

ص١ = ص٢

ع١ = ع٢

لنحصل على ٣ معادلات نعوض لها، ل٢

③ نحل اى معادلتين لنحصل على ل١ ، ل٢

④ نعوض فى المعادلة الثالثة بـ ل١ / ل٢

- حققت → (متقاطعة)
- لم تحقق → (متخالفة)

خلاصة علاقة مستقيمين

هـ١ // هـ٢ ←
- متوازيان
- منطبقان

(أكمل) نعطى متغير واحد قيمة ونعوض فى الثانى

- حققت → (منطبقان)
- لم تحقق → (متوازيان)

ضيب لو هـ١ لا يوازى هـ٢ ←
- متقاطعان
- متخالفان

ك١ = ك + ل١ هـ١

ك٢ = ك + ل٢ هـ٢

ضرب ك. هـ١ × هـ٢ ≠ صفر (متخالفان)

حسام ميرة

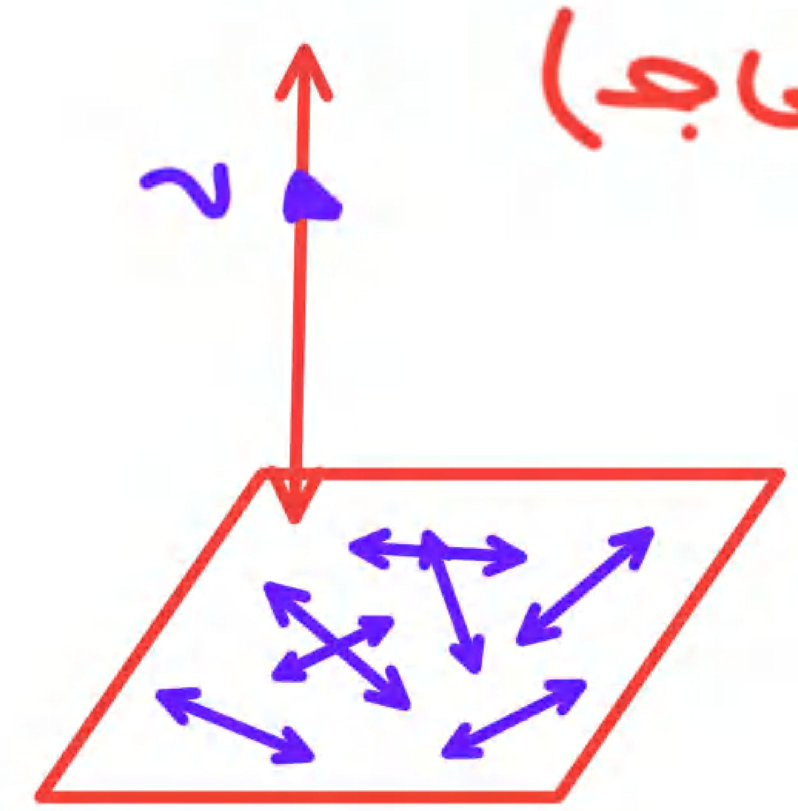
ثانيا : معادلة المستوي في الفراغ

- نقطة $(\vec{أ})$
- متجه عمودي على المستوى $(\vec{ن})$

$\vec{ن}$ ← يضرب في اى رقم حقيقي عدا الصفر

- عمودي على اى مستقيم او متجه في المستوى
- // // // // // // يوازي المستوى
- عمودي على مستوى اخر عمودي على مستواه

$\vec{ن}$ (أ، ب، جـ)



صور مختلفة لمعادلة المستوى

متجهة: $\vec{ن} \cdot \vec{ر} = \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

قياسية: $أ(س - س_1) + ب(ص - ص_1) + جـ(ع - ع_1) = صفر$

عامة: $أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر$ ، حيث $د = - \vec{ن} \cdot \vec{أ}$

$\vec{ن} \cdot \vec{أ}$ ← دائما قيمة ثابتة لاى متجه موضع

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات معادلة المستوى:-

ن ⊥ (P ∩ ا ٠) ← // محور ع

ن ⊥ (٠ ا ∩ ا ص) ← // مستوى كل ص

$$P س + ب ص + ح ع + ء = صفر$$

P = صفر ← // محور س

P = صفر / ء = صفر ← يحوي محور ص

ء = صفر ← يمر بنقطة الأصل

P = صفر / ب = صفر ← // مستوى كل ص

$$P س + ب ص + ح ع + ء = صفر$$

٢ س − ٥ ص + ٤٣ ع + ٧ = صفر

ن = (٦٢ − ٥ ، ٣)

لوحاور نقطة حط متغيرين بأرقام وهات الثالث

$$P س + ح ع + ء = صفر$$

٢ س − ٤٣ ع + ٥ = صفر ن = (٦٠٦٢ − ، −٣)

حط س بـ قم وهات ع والعكس

وضع نقطة بالنسبة لمستوى:-

$أ س + ب ص + ج ع + د = صفر$

لو معايا نقطة

- حققت ∈ المستوى
- لم تحققه ∉ المستوى
  - ناتج ⊕ نفس إشارة المستوى
  - ناتج ⊖ جهتين مختلفتين

حالات (٨):- مهمة جدًا

١) مستقيمين قطعا بعضهما داخل المستوى

$ن = هـ_١ \times هـ_٢$ ✓

٢) مستقيم داخل المستوى + مستقيم آخر يوازي المستوى

$ن = هـ_١ \times هـ_٢$ ✓

٣) مستقيم عمودي على المستوى

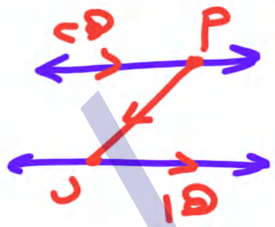
$ن = هـ$ //

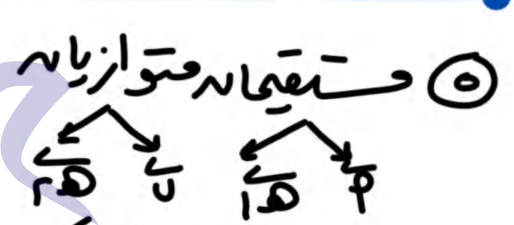
٤) مستوى // مستوى

$ن_١ = ن_٢$ //

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑤ مستقيمان متوازيان





$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{ب د}$

⑥ مستقيم داخل مستوى + مستوى عمودي عل المستوى المطلوب

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ه و} \times \overrightarrow{ن_1}$

$\overrightarrow{ن_1}$

⑦ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة P ماسواه

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ب ص} \times \overrightarrow{ب P}$

اشكال معادلة المستوى خطية :-

① مستوى // مستوى ← نفس $\overrightarrow{ن}$ ✓

② مستوى مار بنقطتين / عمودي على مستوى معلوم $(\overrightarrow{ن_1})$

P فإن

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ن_1} \times \overrightarrow{أP}$

③ مار بنقطة (P) / يوازي متجهين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{م}$

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ق} \times \overrightarrow{م}$

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{P.ن} -$

④ مار بنقطتين ماسواه / يوازي متجه $\overrightarrow{P}$

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{حـ ن}$

⑧ مستقيم نقطة عليه (P) هي نقطة (ب)

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أP}$ ✓

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

⑥ مار بنقطة / يحوى محور س
$ب ص + د ع = ٠$ (٢٦١-٢٦٤)
$-ب + ٢د = ٠$
$ب = ٢ جـ$
$٢د ص + د ع = ٠$
$\boxed{٢ ص + ع = ٠}$

⑦ يقطع من محاور الاحداثيات اجزاء $\neq ٠$ ماجـ
$$\boxed{\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{د} = ١}$$

⑧ مار بنقطة ويقطع من المحاور اجزاء متساوية
$$\boxed{\frac{س}{ا} + \frac{ص}{ا} + \frac{ع}{ا} = ١}$$ عوض بالنقطة حل المعادلة

⑨ مار بنقطة $ا$ ماجـ / قاطع المحور بـ من اجزاء متساوية
$$\boxed{\frac{س}{د} + \frac{ص}{د} + \frac{ع}{د} = ١}$$ عوض بالنقطة حل المعادلة ✓

⑩ عمودى على مستوى $(\overrightarrow{ن_١})$ ويقطع المحور بـ من $ض$
$\frac{١}{د} ع + \frac{١}{ب} ص + \frac{١}{ا} س = ١$
$(٠،٠،ا)$ ، $(٠،ب،٠)$ ، $(د،٠،٠)$
$$\boxed{\frac{ع}{د} + \frac{ص}{ب} + \frac{س}{ا} = ١}$$
$\overrightarrow{ن_٢} = (\frac{١}{د}، \frac{١}{ب}، \frac{١}{ا})$
$\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢} = ٠$ ← ضرب ← هات جـ ثم كون المعادلة

⑪ عمودى على مستويين
$$\boxed{\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢}}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(١٢) مستوى يحوى مستقيم / يوازى مستقيم اخر

$\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{هـ_2}$

(١٣) يحوى مستقيم ونقطة (ب)

هات نقطة $P \in$ المستقيم

$\vec{ن} = \vec{ب P} \times \vec{هـ}$

(١٤) يحوى مستقيم وعمودى على مستوى $(\vec{ن_1})$

$\vec{هـ_1}$

$\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{ن_1}$

الصورة البارامترية لمعادلة المستوى

$\vec{ر} = ($نقطة تقاطع$) + ل_1 \vec{هـ_1} + ل_2 \vec{هـ_2}$

$(س، ص، ع) = (٣، ٤، ٢) + ل_1 (٣، ٠، ٦) + ل_2 (-٤، ١، -٦)$

$\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{هـ_2} = (٦، ١٢، ٢-) = (٦، ١٢، ٢-)$

$\vec{ن} \cdot \vec{م} = -٤٦$

$٢س - ١٢ص - ٢ع = -٤٦$

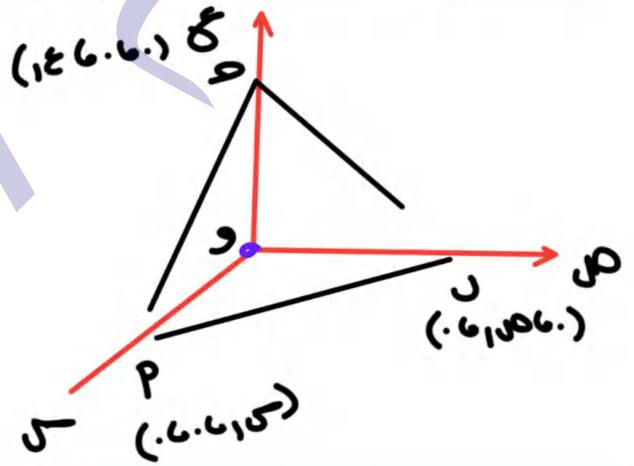
$س = ٢ + ٣ل_1 - ٤ل_2$ $\quad ص = -٤ - ل_2$ $\quad ع = ٢ + ٣ل_1$

$ل_2 = -٤ - ص$ $\quad ل_1 = \frac{ع - ٢}{٣}$

نعوض فى س

$٢س - ١٢ص - ٢ع = -٤٦$

– معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور :-

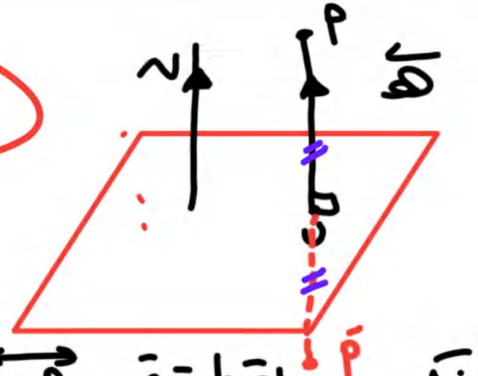


المعادلة $\frac{س}{١٣} + \frac{ص}{١٥} + \frac{ع}{١٤} = ١$

$\Delta م ص ل = \frac{١}{٢} \| \overrightarrow{ص ل} \times \overrightarrow{ص ع} \|$

حجم الهرم $و ل ب ع = \frac{١}{٦} | ١٣ \times ١٥ \times ١٤ |$

سقط نقطة على مستوى :- والانعكاس



$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{ك ل}$

① نكون معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ل ب}$ $\quad \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب} + هـ \overrightarrow{ن}$ معلومة

② $ب \in$ المستقيم ← نجعل ب على صورة معادلات بارامترية

③ $ب \in$ المستوى ← نعوض في معادلة المستوى لـ هـ (ك)

كده وصلنا للنقطة (ب)

④ لو طلب صورة ب بالانعكاس $\overrightarrow{م} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{ل}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

طول العمود المرسوم من نقطة على مستوى :-

م (س١ ، ص١ ، ع١)

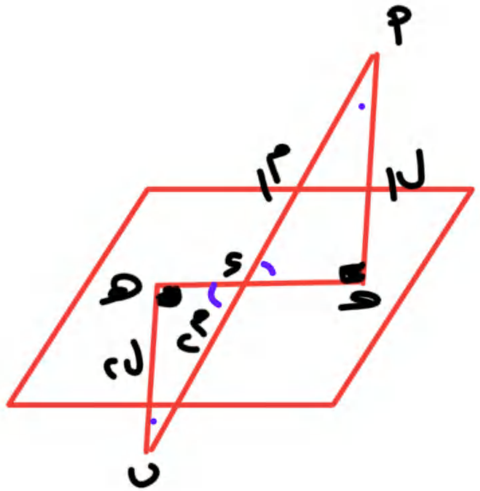
على المستوى أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر

$$ل = \frac{|أ س_{١} + ب ص_{١} + جـ ع_{١} + د|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}}}$$

$$= \frac{|٢ + ٠ + ٠ + ٥|}{\sqrt{١١}}$$

$$= \frac{|(-٣ ، ٠ ، ٠) . (٢ ، ٠ ، ٠) + ٥|}{\sqrt{٢^{٢} + ٠^{٢} + ٠^{٢}}}$$

النسبة التي يقسم بها المستوى الحادة بين المستقيمين م ، ن



لعد م عن المستوى = ل١

لعد ن عن المستوى = ل٢

شرط المثلثان متشابهتان

$$\frac{ل١}{ل٢} = \frac{م١}{م٢}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

معادلة مستوى منصف للزاوية بين مستويين :-

$٢س + ص - ٦ = صفر$ ، $٢س + ٥ص - ٤ع + ١ = صفر$

$$ل = \frac{|٢س + ص - ٦|}{\sqrt{٢^{٢} + ١^{٢}}} = \frac{|٢س + ٥ص - ٤ع + ١|}{\sqrt{٢^{٢} + ٥^{٢} + (-٤)^{٢}}}$$

$ق(س ، ص ، ع)$

بعد ق عن المستوى الأول = بعد ق عن المستوى الثاني

الزاوية بين مستويين :-

$$جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢}|}{||\overrightarrow{ن_١}|| \, ||\overrightarrow{ن_٢}||}$$

البعد بين مستويين متوازيان :-

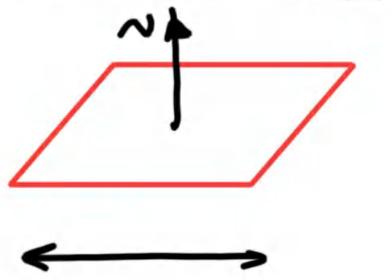
- هات نقطة (ق) ∈ للمستوى الأول
- احسب بعدها عن المستوى الثاني
- لغز الكلام ينطبق ← بعد مستقيم // مستوى ✓

$$ل = \frac{|أ_١ - أ_٢|}{||\overrightarrow{ن}||}$$

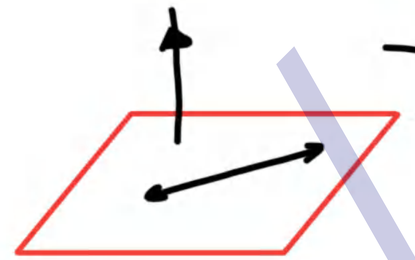
لازم يحقق شرط التوازي

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

علاقة مستقيم بمستوى :-

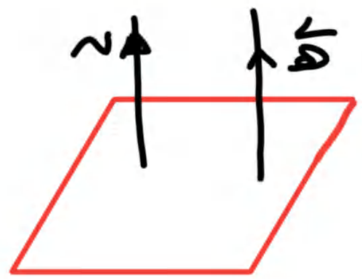


// مستوى



مستقيم ⊂ المستوى

$\vec{ن} \cdot \vec{هـ} = صفر$



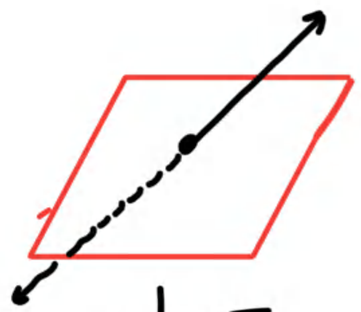
عمودي على المستوى

$\vec{ن} \parallel \vec{هـ}$

$\vec{هـ} = ل \vec{ن}$

$\vec{هـ} \times \vec{ن} = و$

$\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{ه}{د}$



قاطع

$\vec{ن} \cdot \vec{هـ} \neq صفر$

"يميل على جميع اتجاهاته"

$\vec{ن} \cdot \vec{هـ} = صفر$

$ن \cap ب = ل$

"إثبات أنه مستقيم ⊂ المستوى"

$ن \cap ب = \emptyset$

"إثبات مستقيم // المستوى"

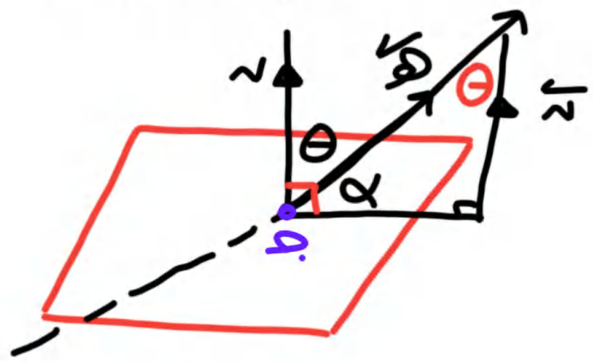
الزاوية بين مستقيم ومستوى:-

مستقيم + مستوى

$$\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{h}|}{|\vec{n}| \, |\vec{h}|}$$

مستقيم + مستقيم

$$\theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{h}|}{|\vec{n}| \, |\vec{h}|}$$



نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى:-

① نوجد المعادلات البارامترية للمستقيم

② نعوض بطرفي معادلة المستوى ← ك

③ نعوض بـ ك لنصل على س ، ص ، ع

اثبات مستقيم يقع في مستوى:-

① نوجد نقطتين على المستقيم

② نثبت أن النقطتين يحققوا معادلة المستوى

نقطة تقاطع ٣ مستويات:-

- حل الـ ٣ معادلات مع بعض

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ:-

① متوازيان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ج_1}{ج_2} \neq \frac{د_1}{د_2}$

② منطبقان $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ج_1}{ج_2} = \frac{د_1}{د_2}$

③ متقاطعان (خط مستقيم)

$\vec{هـ} = \vec{ن_1} \times \vec{ن_2}$

نضع مثلاً س = صفر وحل المعادلتين مع بعض

هات صورة (٠، ص، ع) ← P

$\vec{ر} = \vec{P} + ل \vec{هـ}$

ملاحظات خطية عن خط التقاطع:-

معادلة مستوى

① مار بالنقطة P / يحوي خط تقاطع مستويين

$أ_1 س + ب_1 ص + ج_1 ع + د_1 + ل(أ_2 س + ب_2 ص + ج_2 ع + د_2) = ٠$

حوض بالنقطة ← هات ل وشكرًا

تقليدي $\vec{هـ} = \vec{ن_1} \times \vec{ن_2}$

* نجعل P النقطة (جـ) نخلي س = صفر وحل المعادلتين ← نجيب ص، ع

* $\vec{ر} = \vec{جـ} + ل \vec{هـ}$ (معادلة خط التقاطع)

* نكون $\vec{P جـ}$

* $\vec{ن} = \vec{P جـ} \times \vec{هـ}$

* $\vec{ن} \cdot \vec{جـ} =$ ثابت

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

② مار بخط تقاطع مستويين / موازيًا مستقيم هـ

- $\vec{هـ_1} = \vec{ن_1} \times \vec{ن_2}$
- نفصل م ∈ ← حتى = صفر ص/ع
- $\vec{ر} = \vec{ك} + ل \vec{هـ_1}$ (معادلة خط التقاطع)
- $\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{هـ}$
- $\vec{ن} \cdot \vec{ك}$ = ثابت

لو صورة بارامترية

$\vec{ن} = (أ_1 + ل ه_1 ، ب_1 + ل و_1 ، حـ_1 + ل ح_1)$

$\vec{ن} \cdot \vec{هـ}$ = صفر

هات ل / عوض / شكرًا

③ مار بخط تقاطع مستويين / عمودي م مستوى آخر $\vec{ن_3}$

لغى حظوات معادلة خط التقاطع

$\vec{ر} = \vec{ك} + ل \vec{هـ_1}$

$\vec{ن} = \vec{هـ_1} \times \vec{ن_3}$

$\vec{ن} \cdot \vec{ك}$ = ثابت

لو صورة بارامترية

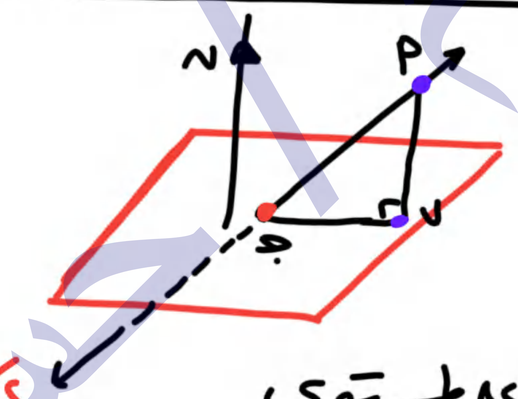
$\vec{ن} = (أ_1 + ل ه_1 ، ب_1 + ل و_1 ، حـ_1 + ل ح_1)$

$\vec{ن} \cdot \vec{ن_3}$ = صفر

هات ل / عوض / شكرًا

م. حسام صيرة

معادلة مستقيم عام مستوى قاطع له:



- نصل ب نقطة م عام المستوى
- جـ نقطة تقاطع المستقيم مع المستوى
- $\overrightarrow{جـب} = \overrightarrow{ن ب}$
- $\overrightarrow{ك} = \overrightarrow{ب} + ل \overrightarrow{جـب}$

صام ميرة

اولا : التلخيص + الملاحظات

مسميات المشتقة الأولي : معدل تغير الدالة / العامل التفاضلي الأول / معدل تغير الدالة / ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات / المشتقة الأولي

رموز المشتقة الأولي : ص / $\frac{د ص}{د س}$ / ق(س) / $\frac{ك}{د س}$(د(س)) / ص(١)

$$ق(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} \quad / \quad ق(أ) = \lim_{س \to أ} \frac{د(س) - د(أ)}{س - أ}$$

قواعد الاشتقاق+ملاحظات مهمة جدا :

1- د(س) = أ ، أ ثابت ∴ ق(س) = صفر

د(س) = -١٢ ، ق(س) = صفر

2- د(س) = $س^{ن}$ ∴ ق(س) = $ن س^{ن-١}$

د(س) = $س^{٥}$ ، ق(س) = $٥ س^{٤}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

3- $د(س) = ب س^{ن}$ ، $د(س) = ب ن س^{ن-1}$

$د(س) = ٢ س^{-٣}$ ، $د(س) = -٦ س^{-٤}$

4- $د(س) = ب س^{ن}$ ، $د(س) = ب$

$د(س) = \frac{٣}{٥} س^{-\frac{٢}{٥}} = \frac{٣}{٥ س^{\frac{٢}{٥}}}$ ، $د(س) = \frac{٣}{٥}$

5- $د(س) = \frac{ب}{[ر(س)]^{٢}}$ ، $د(س) = \frac{-ب ر(س)}{[ر(س)]^{٢}}$

6- $د(س) = ٥(س^{٤}+٣)^{-١}$ ، $د(س) = -٥ \times ٤ س^{٣} (س^{٤}+٣)^{-٢} = \frac{-٢٠ س^{٣}}{(س^{٤}+٣)^{٢}}$

$د(س) = \frac{٥}{س^{٤}+٣}$ ، $د(س) = \frac{-٢٠ س^{٣}}{(س^{٤}+٣)^{٢}}$

6- شتقة العوس :- $ص = (س^{٤}+٥س^{٣}-٣)^{٤}$

$ص = ن [د(س)]^{ن-١} \times د(س)$ ، $ص = ٤(س^{٤}+٥س^{٣}-٣)^{٣} \times (٤س^{٣}+١٥س^{٢}+٥)$

7- مشتقة الجذر التربيعي:-

$ص = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ← $ص = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ← $ص = \frac{١}{٢}(٤ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

ملحوظة $ص = \sqrt[٣]{س^{١}}$ ← $ص = س^{\frac{١}{٣}}$ ← $ص = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$

8- مشتقة الضرب:- $ص = د(س) \times ر(س)$

$\therefore ص = د(س) \times ر'(س) + ر(س) \times د'(س)$

$ص = (-س^{٣} - ٢س + ٣)(س^{٤} + ٥)$

$ص = (-٣س^{٢} - ٢)(س^{٤} + ٥) + (-س^{٣} - ٢س + ٣)(٤س^{٣})$

9- مشتقة القسمة:-

$ص = \frac{د(س)}{ر(س)}$

$ص = \frac{ر(س) \times د'(س) - د(س) \times ر'(س)}{[ر(س)]^{٢}}$

$ص = \frac{٢س^{٣} + ٥}{٣ - س}$ $ص = \frac{(٣ - س) \times ٤س^{٣} - (٢س^{٤} + ٥)}{(٣ - س)^{٢}}$

ملحوظة $\frac{٣س^{٤} - ٥س^{٢} + ٢س}{س} = ٣س^{٣} - ٥س + ٢$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

10- اشتقاق التركيب

قاعدة التركيب (د ○ ر)(س) = د(ر(س))

(هـ ○ ل)(س) = هـ(ل(س))

∴ ص = د(ر(س)) × ر(س)

ملاحظات :-

د(س) ← د — د(س) × 1

د(ك س) ← د — ك د(ك س) × ك

د(س² - ٤) ← د — (س² - ٤) × ٢س

د(أ س) ← د — أ د(أ س) × أ

د(ظا س) ← د — ظا² س × أ

ملاحظة مهمة : اذا كانت د هي الدالة العكسية للدالة ر

∴ (د ○ ر)(س) = ر(د(س)) = س

صيرة

مثال مهم جدا: $د(س) = \frac{1}{س^{2}-2}$ اوجد $\frac{ك}{كس}[(د ه ر)(س)]$ عند $س = -1$

طريقة ①

$(د ه ر)(س) = د(ر(س))$

$= د(س^{2})$ تركيب $\boxed{\frac{1}{س^{2}-2}}$

$= (س^{2}-2)^{-1}$

$\leftarrow -1(س^{2}-2)^{-2} \times 2س$

$-1 \times (-1)^{-2} \times -2 = 2$

طريقة ②

$ر(س) = س^{2}$

$د(س) = (س-2)^{-1}$

$د(ر(س)) \leftarrow د'(ر(س)) \times ر'(س)$

$س = -1$

$د'(ر(-1)) \times ر'(-1)$

$د'(1) \times ر'(-1)$

$د'(س) = -1(س-2)^{-2}$

$د'(1) = -1 \times (-1)^{-2} = -1$

$ر'(س) = 2س$

$ر'(-1) = -2$

$= -1 \times -2 = 2$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

11- مشتقة (معدل تغير) د (س) بالنسبة الي ر (س) $= \frac{د(س)}{ر(س)}$ بشرط الدالتين فى نفس المتغير

مشتقة $س^3$ بالنسبة لـ $س^{-5}$

$= \frac{3س^2}{-5س^{-6}}$

عند س = 3

$= \frac{27}{\frac{3}{2}} = \frac{27 \times 2}{3} = 18$

12- مشتقات الدوال المثلثية زاوية لتعريف دائرى

إذا كانت : ص = جا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = جتا س × 1

إذا كانت : ص = جتا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − جا س × 1

إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = $قا^2$ س

إذا كانت : ص = ظتا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − $قتا^2$ س

إذا كانت : ص = قا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = قا س ظا س

إذا كانت : ص = قتا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − قتا س ظتا س

ص = جا س ، ص = جا ٥ س

ص = جتا س ، ص = جا (π/2 − س) ، ص = − جا ٥ س × 1

ص = ظا (ط س) ، ص = $قا^2$ (ط س) × جتا س × ط

ص = قا − جتا س ، ص = قا − جتا س × ظا − جتا س × (−1)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

13- اشتقاق المقياس = $\frac{\text{ما بداخل المقياس} \times \text{مشتقة ما بداخل المقياس}}{\text{المقياس}}$

$د(س) = |٢س|$

طريقة ①

$ن(س) = \frac{٢س \times ٢}{|٢س|}$

$ن(-٣) = \frac{-١٢}{٦} = -٢$

اوجد $ن(-٣)$

طريقة ②

$د(س) = \begin{cases} ٢س & س \geq ٠ \\ -٢س & س < ٠ \end{cases}$

$ن(س) = \begin{cases} ٢ & س > ٠ \\ -٢ & س < ٠ \end{cases}$

$س = ٠$ غير موجودة

$ن(-٣) = -٢$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

قاعدة مهمة جدا جدا:

$$\text{د}(\text{ظا س}) = \text{جا س} + \text{جتا}^2 \text{س}$$

$$\therefore \text{د}(1) =$$

$$\text{د}(\text{ظا س}) \times \text{قتا}^2 \text{س} = \text{جا س} - \text{جتا}^2 \text{س}$$

$$\text{ظا س} = 1$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{4} = 45°$$

$$\text{د}(1) \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{د}(1) \times 2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{د}(1) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}$$

$$0 < \text{س} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{د}(\text{س}^2 + 5\text{س} - 2) = (3 + 2\text{س})$$

$$\therefore \text{د}(7) =$$

$$\text{د}(3 + 2\text{س}) \times 2 = 2\text{س} + 5$$

$$\text{س} = 2$$

$$3 + 2\text{س} = 7$$

$$2\text{س} = 4$$

$$\text{س} = 2$$

$$\text{د}(7) \times 2 = 9$$

$$\text{د}(7) = \frac{9}{2}$$

حسام ميرة

الاشتقاق الضمني :

صريحة: $ص = د(س)$ ، $ص = \sqrt{س - ٤}$ ، $ص = ٢س^{٥} - ٤$

ضمنية: $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ، $ص جتاس + ص^{٢} = -٢$

$ص^{٥} + ٤س ص = ٣س^{٤} + ٢ص$

بالنسبة لـ س

$٥ص^{٤} \frac{دص}{دس} + ٤س \frac{دص}{دس} + ٤ص = ١٢س^{٣} + ٢ \frac{دص}{دس}$

بالنسبة لـ ص

$٥ص^{٤} \frac{دص}{دص} + ٤س \frac{دص}{دص} + ٤ص \frac{دس}{دص} = ١٢س^{٣} \frac{دس}{دص} + ٢ \frac{دص}{دص}$

$٥ص^{٤} + ٤س \frac{دص}{دص} + ٤ص = ١٢س^{٣} \frac{دس}{دص} + ٢$

مشتقة $س^{٣}$ بالنسبة لـ

س ← $٣س^{٢}$

ص ← $٣ص^{٢} \frac{دص}{دس}$

ن ← $٣ن^{٢} \frac{دن}{دس}$

$\frac{د}{دس}(ص^{٥}) \leftarrow ٥ص^{٤} \frac{دص}{دس}$

$\frac{د}{دس}(س ص) \leftarrow$

$س \frac{دص}{دس} + ص \times ١$

م/ صام ميرة

مهارة تحويل الضمني لصريح :

$$ص = ص^{\frac{3}{5}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{5}} = ص^{\frac{3}{5}-1} = ص^{-\frac{2}{5}}$$

$$ص = ص^{\frac{2}{3}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{3}} = ص^{\frac{2}{3}-1} = ص^{-\frac{1}{3}}$$

$$ص = ص^{\frac{1}{2}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{2}} = ص^{\frac{1}{2}-1} = ص^{-\frac{1}{2}}$$

$$ص = ص^{\frac{3}{4}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{4}} = ص^{\frac{3}{4}-1} = ص^{-\frac{1}{4}}$$

$$ص = ص^{\frac{4}{5}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{5}} = ص^{\frac{4}{5}-1} = ص^{-\frac{1}{5}}$$

$$ص = ص^{\frac{5}{6}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{6}} = ص^{\frac{5}{6}-1} = ص^{-\frac{1}{6}}$$

$$ص = ص^{\frac{6}{7}} \Rightarrow ص^{\frac{1}{7}} = ص^{\frac{6}{7}-1} = ص^{-\frac{1}{7}}$$

$$ص =

الاشتقاق البارامتري : ص = د(ن)   س = د(ن)   ن هو الوسيط (البارامتر)

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$$

ص = $ن^3 + 2ن - 1$

س = $2ن^2 + 5ن - 7$

$\frac{دص}{دن} = 3ن^2 + 2$

$\frac{دس}{دن} = 4ن + 5$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = (3ن^2 + 2) \times \frac{1}{4ن + 5} = \frac{3ن^2 + 2}{4ن + 5}$

مهارة التخلص من البارامتر

ص = $\frac{ع+1}{ع-1}$ ، س = $\frac{ع-1}{ع+1}$

س ص = 1   ص = $\frac{1}{س}$ $\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{س^2}$

ص = جتا θ ، س = قا θ

س ص = 1

ص = $\frac{1}{س}$ $\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{س^2}$

ص = جتا $(\frac{\pi}{6} ع)$ ، ع = 3س

ص = جتا $(\frac{\pi}{6} \times 3س)$

= جتا $(\frac{\pi}{2} س)$

(اهم) ص = ظا^2 ع ، س^2 = قا^2 ع

1 + ظا^2 ع = قا^2 ع

1 + ص = س^2

ص = س^2 − 1

$\frac{دص}{دس} = 2س$

حسام ميرة

ملاحظة عن ميل المماس

مماس أفقي ← م = $\frac{ص}{س}$ = صفر ← بسط $\frac{ص}{س}$ = صفر (الأسرية)

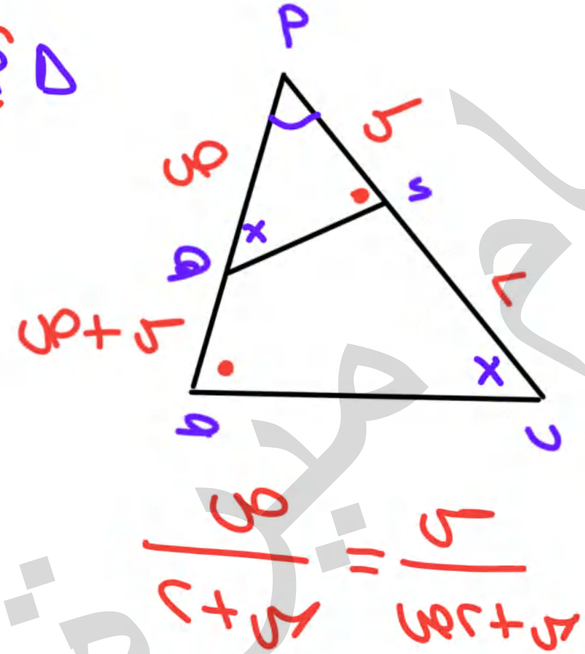
مماس رأسي ← م = $\frac{ص}{س}$ = غير معرفة ← مقام $\frac{ص}{س}$ = صفر

$\frac{ص}{س} = \frac{س-٣}{س^٤-٤س+٣}$

مماس أفقي ← $س-٣=٠$ ← $س=٣$

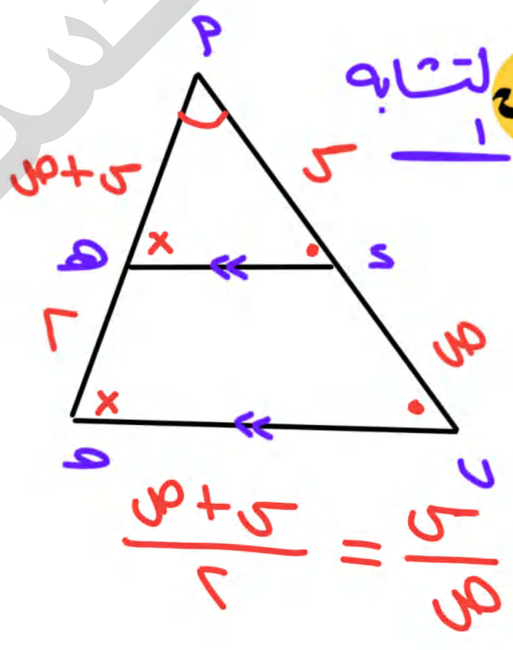
مماس رأسي ← $س^٤-٤س+٢=٠$ ← $(س-٣)(س-١)=٠$ ← $س=٣$ ، $س=١$

تراكمي وربط بالاشتقاق



$\triangle$ أ ب ج ~ $\triangle$ أ ء هـ

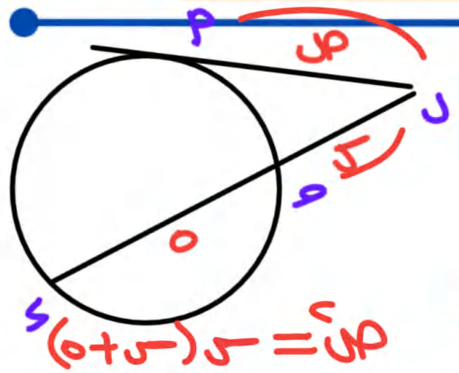
$\frac{ل+ص}{ل} = \frac{ل+ع}{ل+ص+ع}$

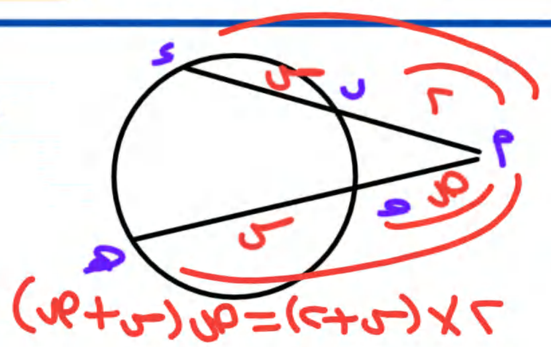


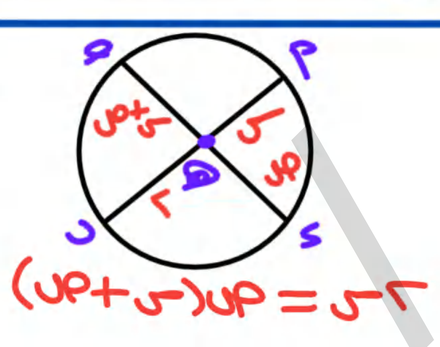
لتشابه $\frac{1}{1}$

$\frac{ل+ص}{ل} = \frac{ل+ص+ع}{ل+ع}$

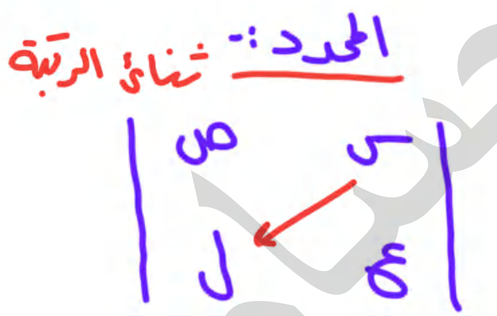
تطبيقات لتشابه في الدائرة :-

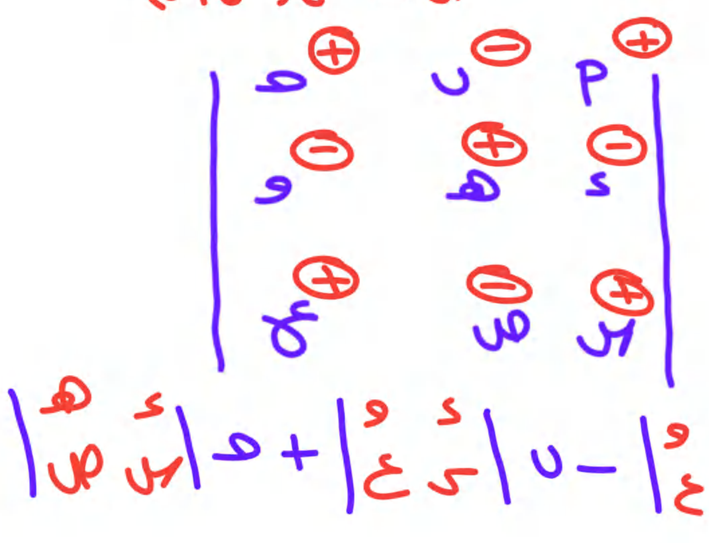




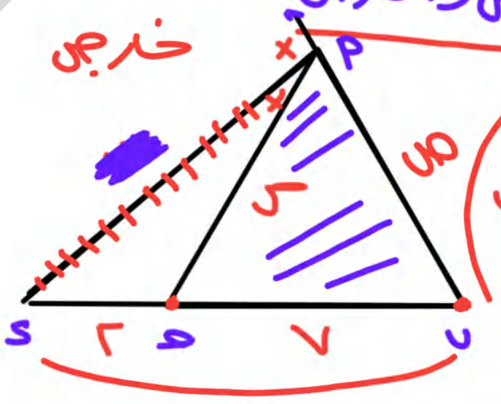


المحدد :- ثنائي الرتبة





المضلع الداخلي والخارجي :-



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات المماس والعمودي

المماس // السينات ص̇ = صفر

// صادات ص̇ = غير معرف = $\frac{1}{0}$

يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ص̇ = ظا θ

// مستقيم ص̇ = ميل المستقيم

⊥ مستقيم ص̇ = $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم}}$

(٢) محور السينات يمس المنحنى (مماس للمنحنى)

ص = صفر

ص̇ = ٠

(٣) محور الصادات يمس المنحنى (مماس للمنحنى)

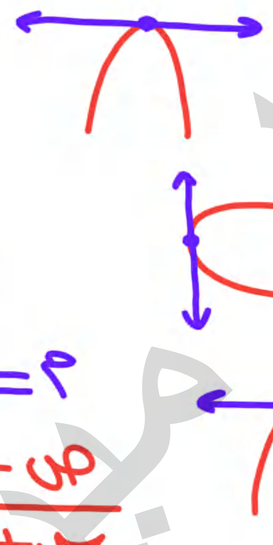
ص̇ = غير معرف

س = ٠

(٤) مستقيم (—) يمس منحنى (—)

ص̇ = ٢ص̇

١٠٠ = ٢٠٠



تكوين المعادلة :-

ص − (ص نقطة التماس) = ميل (س − (س نقطة التماس))

(ص − ٤) = −٤ (س − ٢)

ص − ٤ = −٤س + ٨

ص + ٤س − ١٢ = ٠

⑤ نقطة تقاطع منحنيه ← خارجيًا ص١ = ص٢ ص١ = ٢س^٢ - ٣ ص٢ = -س^٢ + ٥س - ٢

٢س^٢ - ٣ = -س^٢ + ٥س - ٢

حل المحاسن:- ص = -س^٢ - ٣ ص' = -٢س ص'/١ = ١ ص = ٢

① نقوم باشتقاء منحنى الدالة ثم نعوض بالاحداثيين لنقطة التماس م = ص' = ص'/س'

② لو معايا نقطتين مع المحاسن م = (ص٢ - ص١)/(س٢ - س١) (٢، ٦١) ، (-٥، ١٦) م = (٥ - ٢)/(-١ - ١)

③ لو معايا زاوية ميل المحاكم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (θ) م = ظا θ θ = ٦٠ م = ظا ٦٠ = √٣

④ لو معايا معادلة المحاكم ص = م س + د

م = معامل س = ص'/س'

م = -معامل س / معامل ص = -م/ب

أ س^٢ + ب س + د = ٠

⑤ ميل المستقيم // السينات م = صفر

// صادات م = غير معرف

صيرة

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ} = د'(س)$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(س)-د(س+هـ)}{هـ} = -د'(س)$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{هـ}{د(س)-د(س+هـ)} = \frac{-1}{د'(س)}$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ} = \frac{1}{د'(س)}$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(س)-د(س+هـ)}{هـ} = -د'(س)$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{هـ}{د(س)-د(س+هـ)} = \frac{-1}{د'(س)}$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(س+هـ)-د(س)}{٢هـ} = \frac{1}{٢}د'(س)$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د(٣+هـ)-د(٣)}{هـ} = د'(٣)$$

مستقات عليا

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د'(س+هـ)-د'(س)}{هـ} = د''(س)$$

$$\text{لها}_{هـ\to 0}\frac{د'(س+هـ)-د'(س)}{هـ} = د''(س)$$

المشتقات العليا

(١) $ص = \frac{د ص}{د س}$ مشتقة اولى / معدل التغير / ميل المماس للمنحنى

(٢) $ص'' = \frac{د^2 ص}{د س^2}$ مشتقة ثانية / معدل تغير ميل المماس

وهكذا

③ مسائل جذر تربيعي ← حول الجذر (قوس) $\frac{1}{2}$ واشتقه ← $ص'' / ص^{(3)}$

④ قاعدة السلسلة $\frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ص} = 1$

وللتحقق $\frac{د^2 ص}{د س^2} \times \frac{د س^2}{د^2 ص} \neq 1$

⑤ اذا كانت $د(س)$ كثيرة حدود وكانت $د(س) + د'(س) + \cdots = $ دالة من الدرجة $(ن)$

فإنه $د(س)$ من الدرجة $(ن)$

$ص = \sqrt{س - ٤}$ ← $ص = (س - ٤)^{\frac{1}{2}}$

$ص' = \frac{1}{2}(س - ٤)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{س - ٤}}$

$\frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ص} = 1$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\frac{د س}{د ص}}$

$= \frac{2\sqrt{س - ٤}}{2}$

$= \sqrt{س - ٤}$

$ص = \sqrt{٢س + ٥}$

$ص' = \frac{1}{2}(٢س + ٥)^{-\frac{1}{2}} \times ٢$

$= \frac{٢}{2\sqrt{٢س + ٥}}$

$= \frac{1}{\sqrt{٢س + ٥}}$

نمط الاشتقاق

① كثيرات الحدود

$ص = س^ن$

$ص^{(ن)} = ن!$

$ص^{(ن+1)} = صفر$

$ص^{(ن-1)} = ن! س$

$ص^{(م)} = {}^{ن}ل_{م}\, س^{ن-م}$ بشرط $ن \geq م$

$ص = س^٣$ ، $ص' = ٣س^٢$ ، $ص'' = ٦س = ٣!س$ ، $ص''' = ٦ = ٣!$ ، $ص^{(٤)} = صفر$

$ص = س^٦ \leftarrow ٦س^٥ \leftarrow ٣٠س^٤$

$ص^{(٢)} = {}^{٦}ل_{٢}\, س^٤$

$ص^{(٦)} = {}^{٦}ل_{٦}\, س = ٦!$

$ص^{(٨)} = صفر$ ، ${}^{٦}ل_{٨}$ ✗

② جا / جتا

$ص = جا س$ ، $ص^{(٤)} = ص = جا س$

$ص = جتا س$ ، $ص^{(٤)} = ص$ ، $ص^{(١٢)} = جتا س$

$ص = جا م س$ ، $ص^{(ن)} = م^{ن}$ جا م س

$ص^{(٢١)} = م^{٢١}$ جتا م س / $ص^{(٢٠)} = م^{٢٠}$ جا م س

$ص^{(٤٣)} = م^{٤٣} \times -$ جتا م س

$ص^{(٤٠)} = م^{٤٠}$ جا م س

$ص = جتا م س$ ، $ص^{(ن)}$ ن تقبل ٤ ، $ص^{(ن)} = م^{ن}$ جتا م س

$ص^{(٢٦)} = م^{٢٦} \times -$ جتا م س

$ص^{(٢٤)} = م^{٢٤}$ جتا م س

− جا م س ، − جتا م س

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

اشتقاق الدوال الأسية

$د(س) = هـ^{د(س)}$

$د(س) = هـ^{د(س)} \times د'(س)$

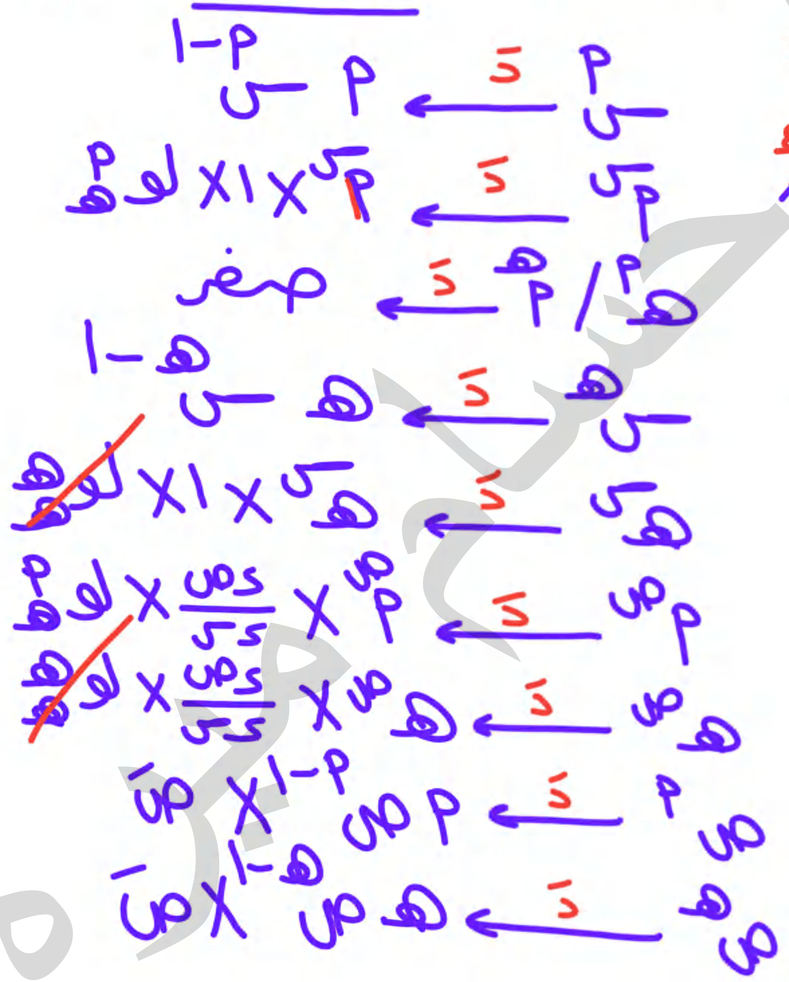
$د(س) = ك^{د(س)}$

$د'(س) = ك^{د(س)} \times د'(س) \times$ لو$_{هـ}$ ك

$ك \in ح^+ - \{1\}$ ، $ك \neq 1$

ملاحظات

بالنسبة لـ س



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

نمط اشتقاق الدوال الأسية

$$\frac{د}{د س}(ه^{ع}) = ه^{ع}$$

$$ص^{(ن)} = ه^{س}$$

$$\frac{د}{د س}(ه^{ع}) = ه^{ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$ص^{(ن)} = ه^{٢س} \quad ص^{(٢٠١٤)} = ه^{٢س}$$

$$\frac{د}{د س}(ه^{ع}) = ه^{ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$ص^{(ن)} = ه^{-س} \quad ص^{(٩٩)} = ه^{-س}$$

$$\frac{د}{د س}(ه^{ع}) = ه^{ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$ص^{(ن)} = ه^{٣س+٥} \quad ص^{(٨٢)} = ه^{٣س+٥}$$

صام ميرة

اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

$د(س) = لو_{هـ} د(س)$

$$د'(س) = \frac{د'(س)}{د(س) \times لو_{هـ} هـ}$$

$د(س) = لو_{أ} د(س)$

$$د'(س) = \frac{د'(س)}{د(س) \times لو_{هـ} أ} = \frac{د'(س) \times لو_{أ} هـ}{د(س)}$$

$ص = لو_{هـ} (س^٢ + ٣)$

$$ص' = \frac{٢س}{س^٢ + ٣}$$

- نمط الدالة اللوغاريتمية: $ص = لو_{هـ} س$

$$ص^{(ن)} = (-١)^{ن-١} \lfloor ن-١ \; س^{-ن}$$

$$ص^{(١٢)} = (-١)^{١١} \lfloor ١١ \; س^{-١٢} = - \lfloor ١١ \; س^{-١٢} = \frac{- \lfloor ١١}{س^{١٢}}$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

$(دالة)^{دالة}$ ، $\sqrt{\frac{—}{—}}$

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^س$

$لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} س$

$$\frac{ص'}{ص} = س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س$$

$ص' = ص(١ + لو_{هـ} س)$

$ص' = س^س(١ + لو_{هـ} س)$

$س^س$ ، $هـ^س$ ، $س^{هـ}$ ، $هـ^{هـ}$

$$ص = \sqrt{\frac{س+١}{س-١}}$$

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} \left(\frac{س+١}{س-١}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$لو_{هـ} ص = \frac{١}{٢} \left[لو_{هـ}(س+١) - لو_{هـ}(س-١) \right]$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المعدلات الزمنية المرتبطة

- المقصود بالمعدل الزمني :- هو المعامل التفاضلي الأول بالنسبة للزمن "المتغير ن"
- المقصود بكلمة مرتبطة :- المتغيرات الموجودة مرتبطة ببعضها البعض والكل مرتبط بالزمن ن

لحل تمارين المعدلات الزمنية المرتبطة نتبع الآتي :

ثابت / متغير

① نحدد المتغيرات الموجودة في التمرين من معدل تغير الشئ المعطى أو معدل تغير المطلوب

② نوجد علاقة بين تلك المتغيرات مع ملاحظة أن هذه العلاقة هي علاقة بين المتغيرات عند أي لحظة زمنية (ن)

③ نجري عملية الاشتقاق الضمني بالنسبة للزمن للمتغيرات الموجودة في العلاقة

④ بعد عملية الاشتقاق الضمني نعوض عن المعطيات للحصول على المطلوب

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

«انتبه أن التعويض بعد عملية الاشتقاق» مع ملاحظة :

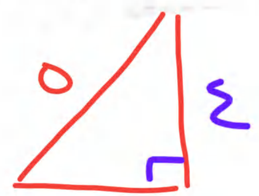
(أ) إذا وجد متغير عند التعويض لم نعرف قيمته نحصل عليه بالتعويض في العلاقة الأساسية

(ب) إذا كان معدل التغير معدل زيادة أو يفهم من سياق التمرين أنه معدل زيادة
نعوض عنه بالقيمة الموجبة للمعدل المعطى

① يتزايد ✓
② يبتعد ✓
③ يتمدد ✓
④ يصب ✓

(جـ) إذا كان معطى المعدل معدل نقصان أو يفهم من سياق التمرين على أنه معدل نقصان مثل
نعوض عن قيمته بالسالب

① يتناقص ✓
② يقترب ✓
③ ينكمش ✓
④ ينصهر ✓
⑤ يتسرب ✓



$\frac{\text{م}\leftarrow}{\text{م}\leftarrow} = \frac{٣\leftarrow}{\text{م}\leftarrow}$

$\text{م}\leftarrow = \sqrt{٥^{٢} - ٤^{٢}} = ٣$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

ملاحظات :-

① إذا أعطى علاقة بين متغيرين فإننا نفرض المتغير الذي أعطى معدل تغيره بالرمز (س) ونحصل على المتغير الآخر بدلالة (س)

② إذا كان مطلوب معدل الزيادة أو النقصان بعد زمن ما يفضل أن تكون العلاقة التي نحصل عليها كدالة في الزمن بدلالة الزمن ن مع مراعاة أي

بعد سواء بالزيادة أو النقصان = المعدل × ن ، مثال ذلك :

(أ) كرة تتمدد بانتظام بحيث يتزايد نصف قطرها بمعدل ٥ سم/ ث^{٢} ⟸ نق = ٥ن

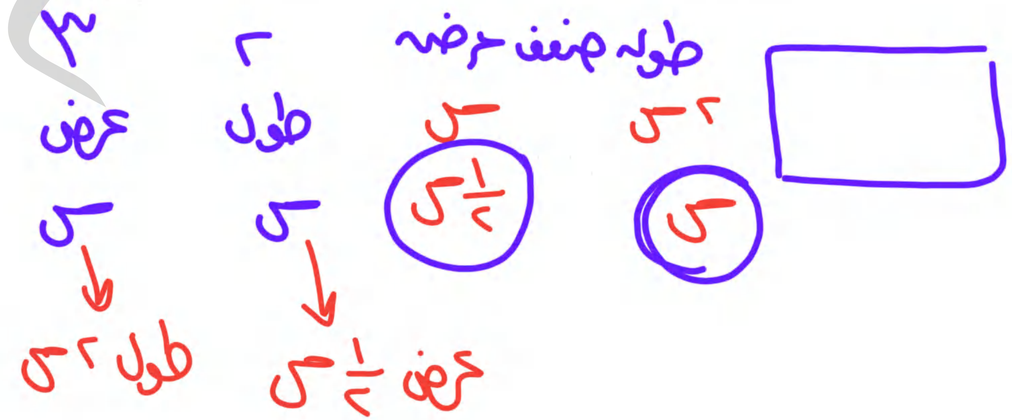
(ب) مثلث قائم الزاوية طولا ضلع القائمة ٦ ، ١٣ وكان الأول يتزايد بمعدل ٢سم/ ث والثاني يتناقص بمعدل ١سم/ ث

فإن طولا ضلعي القائمة بعد ن ثانية هي ٦ + ٢ن ، ١٣ − ١ × ن

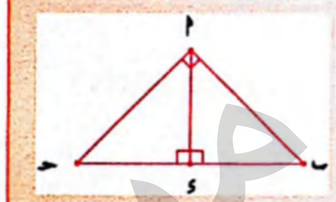
(ج) مستطيل طول بعديه ١٥ ، ٣٥ وكان الضلع الأول يتزايد بمعدل ٣سم/ ث والضلع الثاني يتناقص بمعدل ١,٥سم/ ث

فإن بعدا المستطيل بعد ن ثانية هما ١٥ + ٣ن ، ٣٥ − ١,٥ ن

(د) متى يتوقف عند الزيادة / النقصان ⟸ معدل تغيرها = صفر



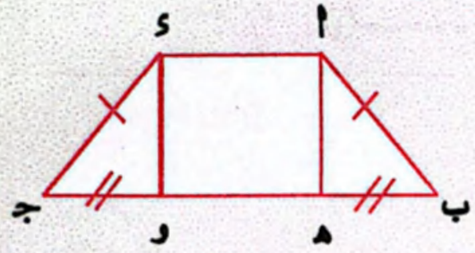
الشكل	بعض الخواص والقوانين المرتبطة بالشكل
المثلث	① مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية بينهما مساحة سطح المثلث المتساوي الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × مربع طول ضلعه محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه مساحة سطح المثلث المعلوم إحداثيات رؤوسه (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) ، (س٣ ، ص٣) $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & 1 \\ س_2 & ص_2 & 1 \\ س_3 & ص_3 & 1 \end{vmatrix}$ حيث أ، ب، جـ أطوال أضلاعه ، ح = $\frac{أ + ب + جـ}{2}$ **إقليدس :-** تستخدم عند وجود عمود من رأس القائمة على الوتر ① $(ب أ)^2 = ب ء \times ب ج$ ② $(ج أ)^2 = ج ء \times ج ب$ ③ $(ء أ)^2 = ء ب \times ء ج$ ④ $ء أ = \frac{أ ب \times أ ج}{ب ج}$ **فيثاغورث :-** $(ب ج)^2 = (أ ب)^2 + (أ ج)^2$ **لأي مثلث أبجـ :-** $أ^2 = ب^2 + جـ^2 - 2 ب جـ \text{ جتا } أ$



موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

المربع	مساحة سطح المربع = مربع طول ضلعه = $\frac{1}{4}$ مربع قطره محيط المربع = طول الضلع × ٤ طول قطر المربع = $\sqrt{2}$ × طول الضلع
المستطيل	مساحة سطح المستطيل = الطول × العرض = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاوية المحصورة بينهما محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢
متوازي الأضلاع	مساحة سطح متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع =حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
المعين	مساحة سطح المعين = طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين محيط المعين = طول الضلع × ٤

D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

شبه المنحرف	مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع الاعتين المتوازيتين × الارتفاع) **شبه المنحرف المتساوي الساقين :** ① زاويتي القاعدة متساويتين في القياس أي أن : ق(ب) = ق(جـ) ، ق(أ) = ق(ى) ② عند رسم عمودان من أ ، ى على القاعدة الكبرى يكون : ب هـ = جـ و ، أى = هـ و ، أهـ = ى و 
القطاع الدائري	محيط القطاع الدائري = ٢ نق + ل مساحة سطح القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ نق^{2} هـ^{c} هـ^{c} = $\frac{ل}{نق}$ ، حيث : نق : طول نصف قطر دائرة القطاع ، ل : طول قوس القطاع ، هـ^{c} : قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائري
القطعة الدائرية	مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ^{c} − جا هـ)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

الدائرة	مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢} محيط الدائرة = ٢π نق
المضلع المنتظم	قياس زاوية المضلع المنتظم = $\frac{ن - ٢}{ن} \times ١٨٠$ مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤} \times$ ل^{٢} ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$ حيث : ن : عدد أضلاعه ، ل : طول ضلع المضلع
السداسي المنتظم	قياس كل زاوية من زواياه = ١٢٠° القطر أ ء = ب هـ = جـ و = ٢ل الوتر أجـ = ب ء = جـ هـ = ء و = ب و = $٣\sqrt{٣}$ ل مساحة سطح السداسي المنتظم = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ل^{٢} محيط السداسي المنتظم = ٦ل ق(ب$\hat{أ}$جـ) = ق(جـ$\hat{أ}$ء) = ق(ء$\hat{أ}$هـ) = ق(هـ$\hat{أ}$و) = ٣٠° حيث ل : طول ضلع السداسي المنتظم
البعد بين نقطتين	مربع البعد بين نقطتين (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) = مربع الفرق بين الإحداثيين السيني + مربع الفرق بين الإحداثيين الصادي = (س$_{٢}$ − س$_{١}$)^{٢} + (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$)^{٢}
بعد نقطة عن مستقيم	البعد العمودي من النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) على المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ $= \frac{\|أ س_{١} + ب ص_{١} + جـ\|}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التشابه	إذا رسم في مثلث قطعة مستقيم تقطع ضلعين في المثلث وتوازي الضلع الثالث فينتج المثلث الاصغر يشابه المثلث الأصلي بمعنى إذا كان $\overline{ء هـ} \parallel \overline{ا ب}$ فإن: المثلث Δ ا ب جـ ~ Δ ء هـ جـ ويكون $\frac{ء هـ}{ا ب} = \frac{جـ ء}{جـ ا} = \frac{جـ هـ}{جـ ب}$
نافذة تتكون من شكلين	محيط النافذة = مجموع الإطار الخارجي = ا ب + ب جـ + جـ ء + ء هـ + هـ ا = ا ب + ب جـ + جـ ء + π نق مساحة سطح النافذة = مجموع مساحتي سطحي الشكلين

صام ميرة

سلوك الدالة :-

يقصد بدراسة سلوك الدالة دراسة بعض خواص الدالة مثل

- نقاط حرجة
- تزايد وتناقص
- قيم عظمى ومحلية
- قيم صغرى ومحلية
- التحدب
- الانقلاب

د(س)

د(س)

مهم جداً دراسة المجال ← يتم وضعه على خط د(س) / د(س) لابد لنقاط الحرجة / الانقلاب

لابد أنه ∈ المجال

(١) كثيرات الحدود / الأسية / الجذر "دليل مزدوج" ← ح

(٢) الكسرية ← ح - ؟ اصفار المقام ؟

بشرط ألا يسبق دالة كثيرة الحدود / أسية / جذر دليل مزدوج

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

(٣) جذر "دليل زوجي" ← البسط: ما تحت ≥ صفر ، المقام: ما تحت > صفر

(٤) اللوغاريتم ← $\text{لو}_{\text{ه}}$ س ← س > صفر ، س > صفر ، س ≠ ١

د(س) = $\text{لو}_{\text{ه}}$ س ← $ح^{+}$

د(س) = $\text{لو}_{\text{ه}}$ $س^{ن}$ ← $ح - \{٠\}$

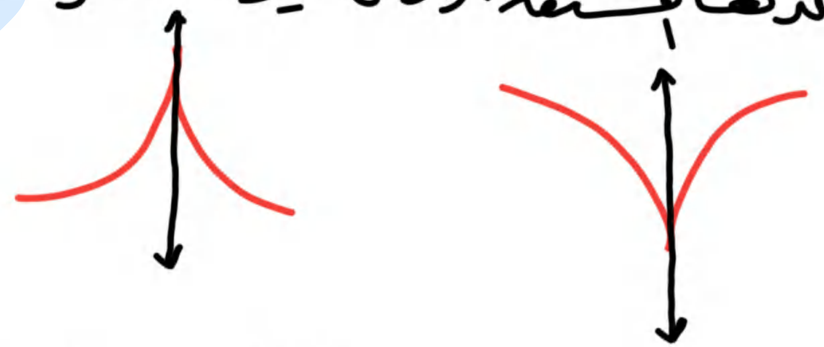
د(س) = $\frac{\text{لو}_{\text{ه}}}{\text{لو}_{\text{ه}}}$ $\frac{س^{ن}}{س^{ك}}$ ← $]-\infty ، ٠[= ح^{+}$

د(س) = $\frac{\text{لو}_{\text{ه}}}{\text{لو}_{\text{ه}}}$ $\frac{س^{ن}}{س^{ك}}$ ← $]-\infty ، ٠[- \{١\}$

النقاط الحرجة:

لازم ∈ المجال / عندها د(س) = صفر [عندها محاك افقي]

عندها المشتقة الأولى غير معرفة [عندها محاك رأسي]



عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة

[مسائل الدالة مجزأة المجال / اعادة تعريف الدالة]

د(س) = { س² - ٤ ، س < ٢ ؛ ٢ - س² ، س ≥ ٢ }

د'(س) = { ٢س ، س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ -٢س ، س > ٢ }

س = ٠ ، س = -٤

التزايد والتناقص:

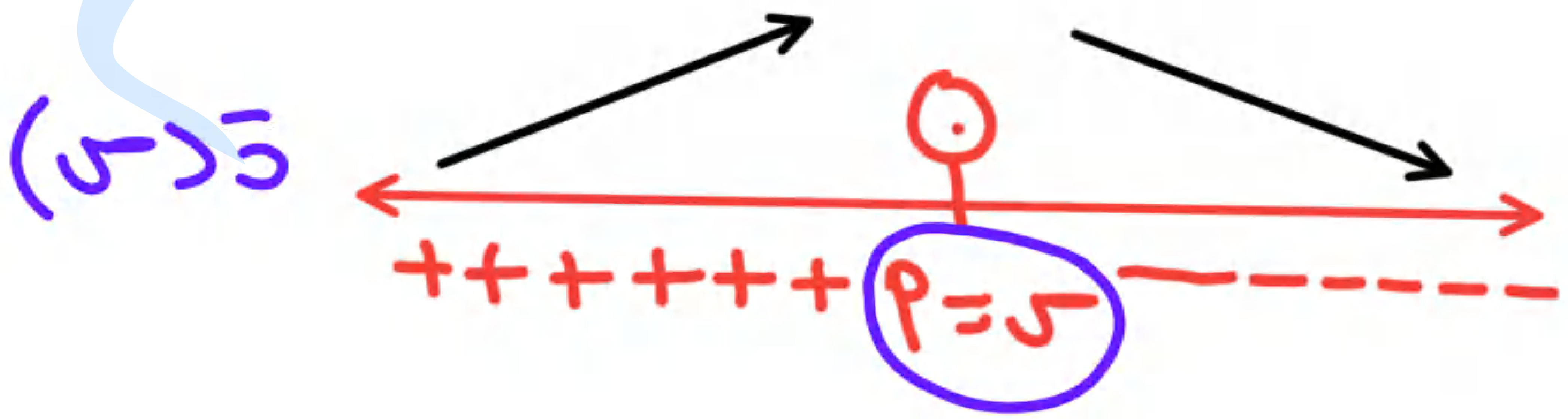
(١) نوجد د̄ (س)

(٢) نضع د̄ (س) = صفر ← بسط = صفر ، مقام = صفر (غير معرفة)

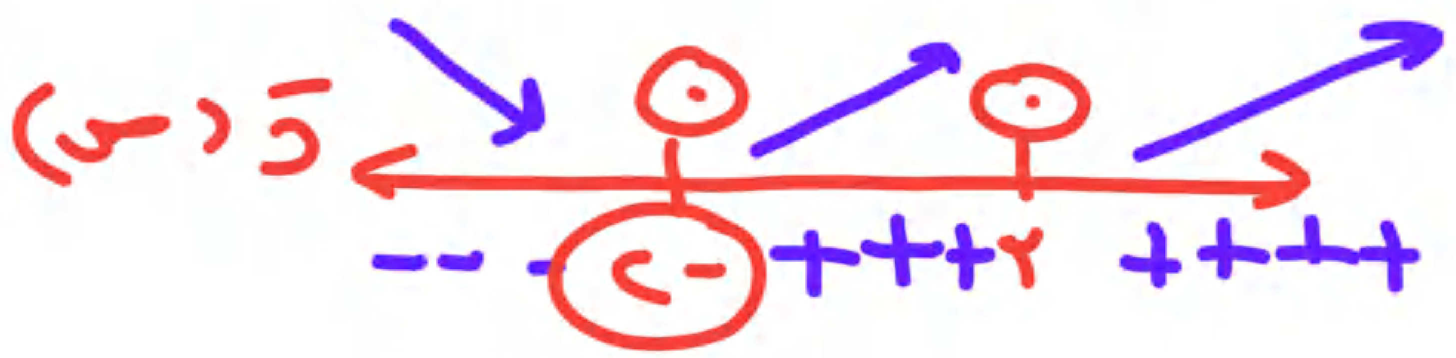
(٣) نرسم خط اعداد د̄ (س) ونبحث الاشارة بحيث

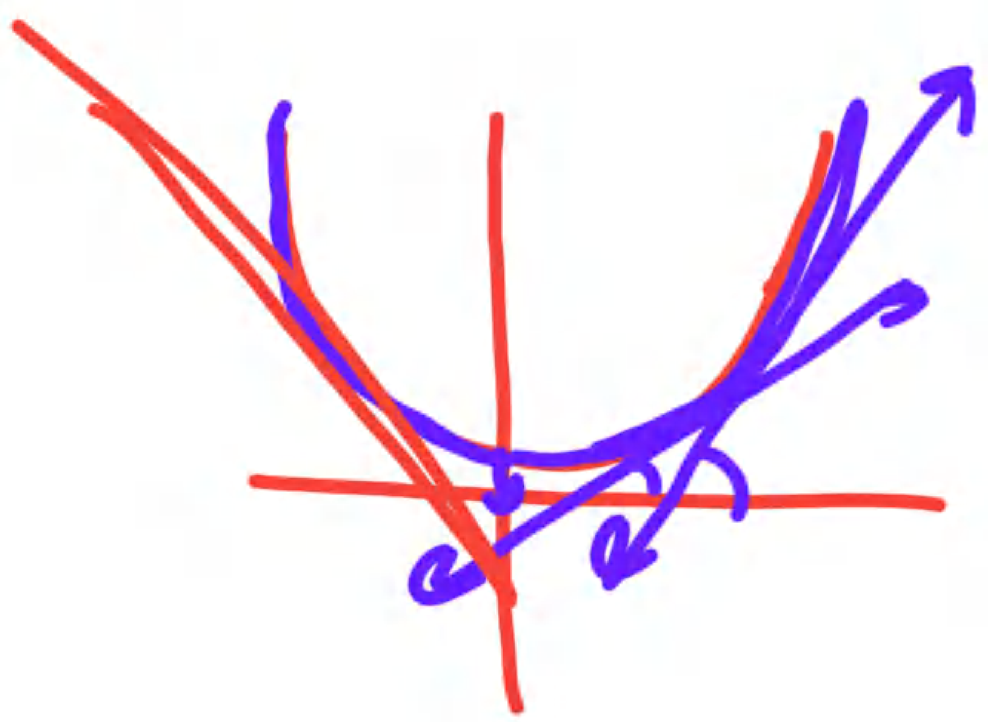
د̄ (س) > صفر ← د (س) متزايدة

د̄ (س) < صفر ← د (س) متناقصة



$٢س^٣ - ٢س^٢ + ٥س + ٧$





D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

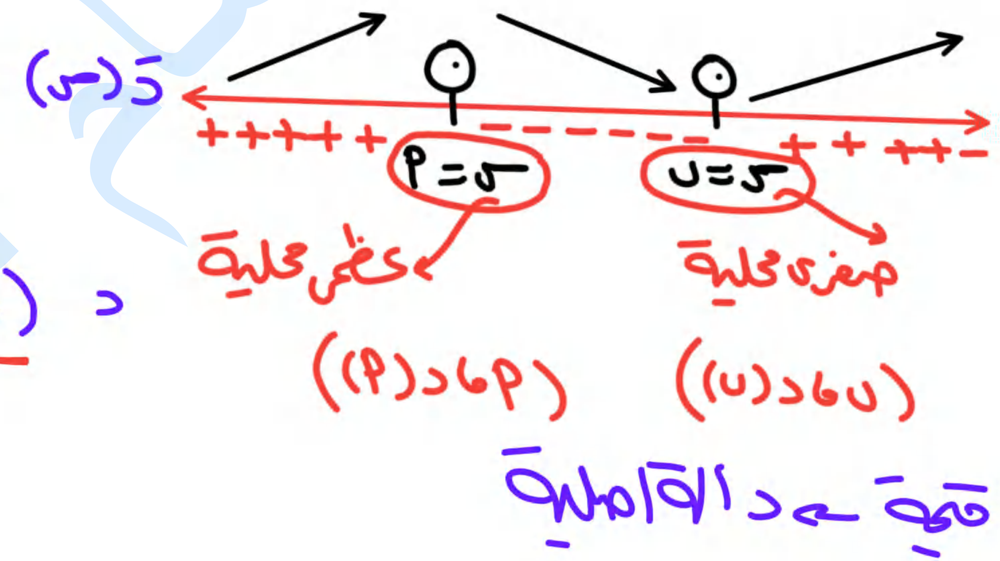
القيم العظمى والصغرى المحلية :-

(١) نوجد $د'(س)$

(٢) نضع $د'(س) = صفر$

- $د'(س) = صفر$
- $د'(س)$ غير معرفة

(٣) نرسم خط اعداد $د'(س)$ ونبحث الإشارة



قيمة حدود الفترة

اذا كان :

① $د'(ق) = صفر$ (حرجة)

وكان $د''(ق) > صفر$

عند $س = ق$ ← صغرى محلية

② $د'(ق) = صفر$ (حرجة)

وكان $د''(ق) < صفر$

عند $س = ق$ ← عظمى محلية

"اختبار المشتقة الثانية"

$د'(٥) = صفر$ حرجة

$د''(٥) > صفر$ ∪

$د'(٧٫٥) = صفر$ حرجة

$د''(٧٫٥) < صفر$ ∩

القيم العظمى والصغرى المطلقة :-

من هذا النوع ليطلب فترة مطلقة [أ ، ب]

(١) نوجد د (أ) / د (ب)

(٢) نوجد د (الحرجة) لازم د لمجال

(٣) أكبر قيمة ← عظمى مطلقة

أصغر قيمة ← صغرى مطلقة

[-٢ ، ٤]

-١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٥

د(-١) د(-٢)

د(١) د(٤)

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

نقط الانقلاب وفترات التحدب :-

(١) لوجد د'(س)

(٢) نضع د'(س) = صفر

د'(س) = صفر

د'(س) غير معرفة

(٣) نرسم خط اعداد ونبحث اشارة د'(س)

لاحظ عند س = ر / س = ب (انقلاب)

(أ) اجمال

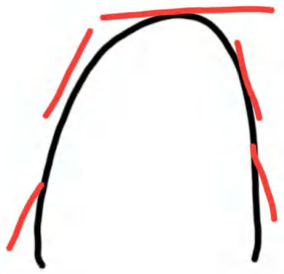
عندهم د'(س) = صفر

محلي واحد فقط

كل فصل بينه تدريسه

مختلفين

ملاحظات :-

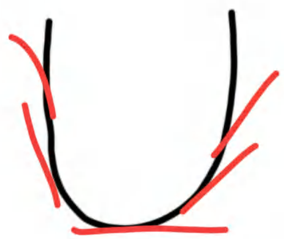


① محدب لاعلى

مقعر لأسفل

د'(س) < صفر

المنحنى يقع اسفل مماسته



② محدب لاسفل

مقعر لاعلى

د'(س) > صفر

المنحنى يقع اعلى مماسته

مسائل المجاهيل:-

① لو قال عند س = P ← حرجة (توقف) / عظمى محلية / صغرى محلية

∴ د(P) = صفر

② لو قال عند س = P انقلاب

∴ د(P) = صفر

③ اذا كانت (P ، ب) ← حرجة (توقف) / عظمى محلية / صغرى محلية

د(P) = صفر

(P ، ب) ∋ د(س)

④ اذا كانت (P ، ب) انقلاب

د(P) = صفر

(P ، ب) ∋ د(س)

صام ميرة

ركم المنحنيات :-

① د(س) = صفر
تعني يوجد مماس افقي // لمنحنى

② د(س) = غير معرفة
تعني يوجد مماس رأسي // لصادات

③ د(س) > صفر
تعني د(س) متزايدة

④ د(س) < صفر
تعني د(س) متناقصة

⑤ د(س) = صفر (نقطة انقلاب)
ج لمجال / عندها مماس واحد فقط / تفصل بينه تحدبين مختلفين

⑥ د(س) > صفر
تعني د(س) متزايدة
د(س) محدب لاسفل

⑦ د(س) < صفر
تعني د(س) متناقصة
د(س) محدب لاعلى

⑧ لو اعطى ركمة د(س)
اركم خط اعداد د(س) / د(س)

⑨ لو اعطى ركمة د(س)
اركم خط اعداد د(س)

⑩ المقارنة بين الدوال د(أ) ----- د(ب)
تناقص
د(كبير) > د(صغير) — تزايد — د(كبير) < د(صغير)

تطبيقات

دالة الوصف م = ك ص^{٣} (س − ٧)^{٢} س

م = ٠ ⇒ ك × ٧^{٢} − ٧ = ٠

٤٩ ك = ٧

ك = ٢٫٥

ب = ٢٫٥

م = ٢٫٥ × ٢٫٥ × ب

ب = س − ٧

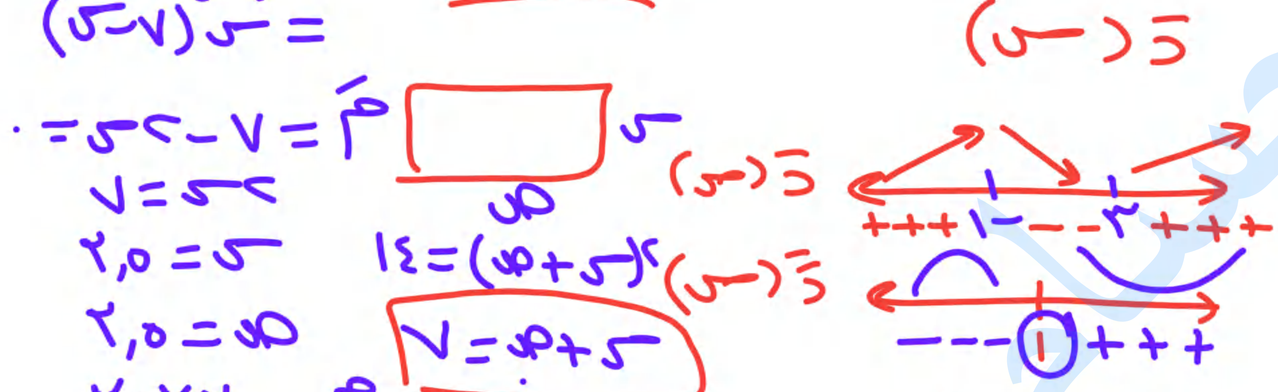
ب = ٧ + س

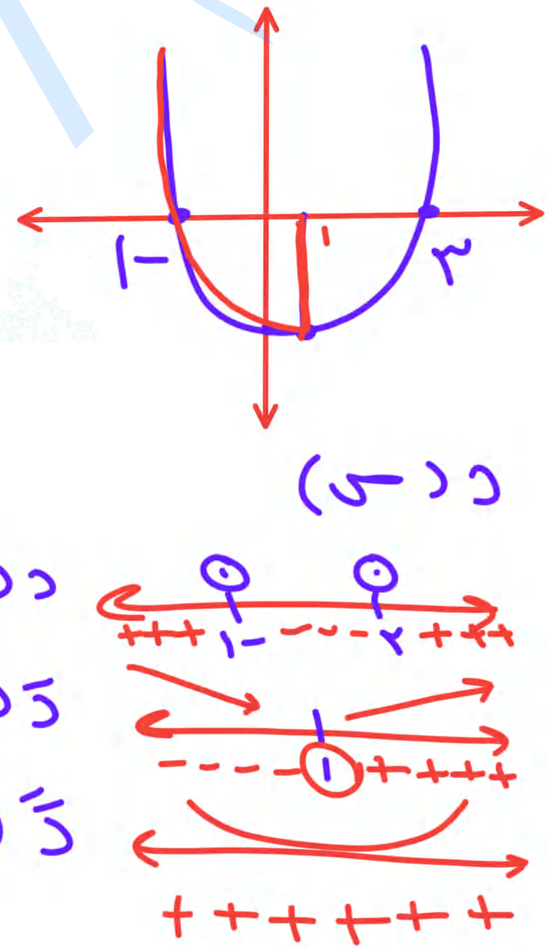
م = ٢٫٥ × ٢٫٥ × (٧ + س)

م = ٤١ + ٣٥ س + ٦٫٢٥ س^{٢}

م$'$ = ٣٥ + ١٢٫٥ س

م$'$ = ٠ ⇒ س = −٢٫٨





f D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

قواعد التكامل الغير محدود :-

① $\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$

② $\int ا \, د(س) \, ءس = ا \int د(س) \, ءس$

③ $\int [و(س) \pm ر(س)] \, ءس = \int د(س) \, ءس \pm \int ر(س) \, ءس$

④ $\int و'(س) جاو(س) \, ءس = -جتاو(س) + ث$

$\int و'(س) جتاو(س) \, ءس = جاو(س) + ث$

$\int و'(س) قا^{٢}و(س) \, ءس = ظاو(س) + ث$

$\int و'(س) قتاو(س) \, ءس = -ظتاو(س) + ث$

$\int و'(س) \times (قاو(س) \times ظاو(س)) \, ءس = قاو(س) + ث$

$\int و'(س) \times (قتاو(س) \times ظتاو(س)) \, ءس = -قتاو(س) + ث$

$\int س^{٥} \, ءس = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

$\int ٢س \, ءس = ٢ \int س \, ءس$

$\int ٣ + ٤س^{٣} \, ءس = ٣ + ٤ \int س^{٣} \, ءس$

$\int جاس \, ءس = -جتاس$

$\frac{١}{٢} \int ٢ جاس جتاس \, ءس = \frac{١}{٢} \int جا٢س \, ءس = \frac{١}{٢} \times \frac{-جتا٢س}{٢} + ث$

م / صام صيرة

⑤ $\int \frac{و'(س)}{2\sqrt{و(س)}}$ د س $= \sqrt{و(س)} + ث$

⑥ $\int و'(س)[و(س)]^{ن}$ د س $= \frac{1}{ن+1}[و(س)]^{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$

⑦ $\int (اس+ب)^{ن}$ د س $= \frac{1}{ا}(اس+ب)^{ن+1} \times \frac{1}{ن+1} + ث$ حيث $ن \neq -1$ ، ما بداخل القوس داله من الدرجه الاولى فى س

⑧ $\int و'(س)$ د س $= و(س) + ث$، $\int و'(س)$ د س $= و(س) + ث$

⑨ $\int ه^{و(س)}(و(س) + و'(س))$ د س $= \int [ه^{و} \times و(س)]'$ د س $= ه^{و} \times و(س) + ث$

⑩

أ $\int ه^{(اس+ب)}$ د س $= \frac{1}{ا} ه^{(اس+ب)} + ث$

$\int و'(س) ه^{و(س)}$ د س $= ه^{و(س)} + ث$

ب $\int ا^{(اس+ب)}$ د س $= \frac{1}{ا} ا^{(اس+ب)} \times \frac{1}{لـ ا} + ث$

$\int و'(س) ا^{و(س)}$ د س $= ا^{و(س)} \times \frac{1}{لـ ا} + ث$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

⑪

أ ∫ $\frac{و'(س)}{و(س)}$ ء س = لـو$_{ه}$|و(س)| + ث حيث د (س) قابله للاشتقاق ، و(س) ≠ صفر

ب ∫ و'(س)ظاو(س) ء س = −لـو$_{ه}$|جتاو(س)| + ث = لـو$_{ه}$|قاو(س)| + ث

∫ و'(س)ظتاو(س) ء س = لـو$_{ه}$|جاو(س)| + ث

∫ و'(س)قاو(س) ء س = لـو$_{ه}$|قاو(س)+ظاو(س)| + ث

∫ و'(س)قتاو(س) ء س = −لـو$_{ه}$|قتاو(س)+ظتاو(س)| + ث

ملاحظه :-

① $\frac{ء}{ء س}$ ∫ و(س) ء س = و(س)

② ∫ $\frac{ء}{ء س}$ و(س) ء س = و(س) + ث

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

① $\int (جـس + ء)(اس + ب)^{ن} دس$

لاحظ ان درجه ما بخارج القوس نفس درجه ما بداخل القوس نتبع الاتى :-

أ نجعل معامل س بخارج القوس نفس معامل س بداخل القوس أي نضرب ما بخارج القوس فى $\frac{١}{جـ}$ و نضرب خارج علاقه التكامل × $\frac{جـ}{١}$

ب نضيف (ب) و نطرح (ب) الى اس وما هو مضاف اليها

ج نوزع (اس + ب + هـ) على $(اس + ب)^{ن}$ = $(اس + ب)^{ن+٢}$ + هـ $(اس + ب)^{ن}$

د نجرى عمليه التكامل $\int [(اس + ب)^{ن+٢} + هـ(س + ب)^{ن}]$ دس = $\frac{١}{١} \times \frac{١}{ن+٢} (اس + ب)^{ن+٢} + \frac{هـ}{١} \times \frac{١}{ن+١} (اس + ب)^{ن+١} + ث$

$\int \frac{س}{(س-٥)^{٢}}$

$\int \frac{(س-٥+٥)(س-٥)}{(س-٥)^{٣}}$

$\int \frac{(س-٥)}{(س-٥)^{٣}} + \frac{٥(س-٥)}{(س-٥)^{٣}}$

م / صام ميرة

② **اذا كانت** درجه ما بداخل القوس م+١ ودرجه ما بخارج القوس م

∫ر(ن)[و(ن)]^ن ء س **بحيث** درجه ر(س) أقل من درجه د(س) بواحد صحيح فقط

أ نحصل على و'(ن)

ب نضرب ر(س) أو نقسم ر(س) **فى** عدد **أو** على عدد لكى يصبح الناتج و'(ن)

لاحظ :-

أ اذا ضربت ر(س) فى عدد نضرب خارج علامه التكامل فى المعكوس الضربى للعدد

ب اذا قسمت ر(س) على عدد نضرب خارج علامه التكامل فى نفس العدد

ج نجرى عمليه التكامل الناتجه

∫و'(ن)[و(ن)]^ن ء س = ١/(ن+١) [و(ن)]^(ن+١) + ث

$-\frac{1}{3}(x^2+2)^5$

م/ صام ميرة

③ اذا كانت درجه ما بخارج القوس تختلف عما ذكر فى ① ، ②

نستخدم التكامل بالتعويض و خطواته كالتالى :-

أ نختار تعويض مناسب هو ع = ر(س) غالبا ما يكون الاختيار ع = ما بداخل القوس أ، ع = ما تحت الجذر

ب نحصل على س بدلاله ع

ج نحصل على على (ءس) بدلالة ع ، ءع

د نعوض عن س ، ءس بدلاله ع , ءع

هـ نجرى عمليه التكامل بالنسبه للمتغير ع

و فى النهايه نعوض عن كل ع بدلاله س من أ

ملاحظه :-

ممكن حل ① ، ② عن طريق التكامل بالتعويض فى ③

صام ميرة

تكامل الدوال الأسية

قاعدة

① $\int هـ^{س} \, د س = هـ^{س} + ث$

② $\int هـ^{(ك س + ا)} \, د س = \frac{١}{ك} هـ^{(ك س + ا)} + ث$

③ $\int د'(س) \, هـ^{د(س)} \, د س = هـ^{د(س)} + ث$

④ $\int ا^{س} \, د س = \frac{ا^{س}}{لو_{هـ} ا} + ث = ا^{س} \, لـو_{ا} هـ + ث$

⑤ $\int ا^{(ك س + جـ)} \, د س = \frac{١}{ك} \times \frac{ا^{(ك س + جـ)}}{لو_{هـ} ا} + ث$

$= \frac{١}{ك} \times ا^{(ك س + ا)} \, لـو_{ا} هـ + ث$

⑥ $\int د'(س) ا^{د(س)} \, د س$

$= ا^{د(س)} \, لـو_{ا} هـ + ث$

صام ميرة

تكامل يؤول إلى دالة لوغاريتمية

① $\int \frac{د'(س)}{د(س)}$ ى س $= لـو|د(س)| + ث$

حيث : د(س) قابلة للاشتقاق ، د(س) ≠ صفر

② $\int د'(س)$ظا د(س) ى س $= -لـو|جتا د(س)| + ث = لـو|قا د(س)| + ث$

③ $\int د'(س)$ظتا د(س) $= لـو|جا د(س)| + ث$

④ $\int د'(س)$قا د(س) ى س $= لـو|قا د(س) + ظا د(س)| + ث$

⑤ $\int د'(س)$قتا د(س) ى س $= -لـو|قتا د(س) + ظتا د(س)| + ث$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

التكامل بالتجزئ

$\int ص\,د ع = ص ع - \int ع\,د ص$

ملاحظه :-

أ يستخدم التكامل بالتجزئ لايجاد تكامل حاصل ضرب الدالتين ليست احدهما مشتقه الاخرى

ب غالبا ما يكون احدى الدالتين $هـ^{د(س)}$ أ، لـو د(س) أ، داله مثلثيه

تفاضل تكامل

ملاحظات على بعض الدوال التى نجرى عليها التكامل التجزئ :-

① اذا كانت احدهما $هـ^{س}$ و الاخرى كثيره حدود

نجعل ص = كثيره الحدود ، ع = الداله الاسيه س

نحصل على د ص بالتفاضلى ، ع بالتكامل

نطبق قاعده اتكامل بالتجزئ و هى $\int ص\,د ع = ص ع - \int ع\,د ص$

ملحوظه :-

أ احيانا بعض المسائل تحتاج الى التكامل بالتجزئ اكثر من مره

ب $\int ن^{٣} هـ^{س}\,د س = هـ^{س}(٦ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٣ن^{١} - ١) + ث$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

② اذا كانت احدهما داله مثلثيه و الباقى كثيره الحدود

نجعل ص = الموجود مع الداله المثلثيه ، ﻫ ع = الداله المثلثيه ﻫ س

نحصل على ﻫ ص بالتفاضلى ، ع بالتكامل

نطبق قاعده اتكامل بالتجزئ و هى $\int ص\,ﻫ ع = ص ع - \int ع\,ﻫ ص$

ملحوظه :-

أ من الممكن ان يكون مع الداله المثلثيه داله اسيه أو لوغاريتميه

نجعل ﻫ ع = الداله المثلثيه ﻫ س ، ص = الباقى

ب $\int ﻫ^{ب س} جا ب س\,ﻫ س = \frac{ﻫ^{ب س}}{ا^{٢} + ب^{٢}} (ا جا ب س - ب جتا ب س) + ت$

$\int ﻫ^{ب س} جتا ب س\,ﻫ س = \frac{ﻫ^{ب س}}{ا^{٢} + ب^{٢}} (ا جتا ب س + ب جا ب س) + ت$

③ اذا كانت احدى الدالتين داله لوغاريتميه

نجعل ص = الداله اللوغاريتيمه ، ﻫ ع = بقيه الموجود ﻫ س

نحصل على ﻫ ص بالتفاضلى ، ع بالتكامل

م صام ميرة

التكامل المحدد

إذا كانت الدالة د (س) متصلة علي [أ، ب] **وكانت** ت (س) أي مشتقة عكسيه للدالة د (س) علي نفس الفترة

فإن : $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس = ت(ب) - ت(أ)$

خواص التكامل المحدد :

① $\int_{أ}^{ب} ر(س)\,ﻫس = -\int_{ب}^{أ} ر(س)\,ﻫس$ ② $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ﻫس =$ صفر

③ **إذا كانت** الدالة د (س) دالة متصلة وفردية علي [-أ، أ] **فإن** $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ﻫس =$ صفر

إذا كانت الدالة د (س) متصلة وزوجيه علي [-أ، أ] **فإن :**

❶ $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ﻫس = ٢\int_{أ}^{0} ر(س)\,ﻫس$

❷ $\int_{-ب}^{ب} د(س)\,ﻫس = \int_{ب}^{ب} ر(س)\,ﻫس$ ✓

④ **إذا كانت:** حـ ∈ [أ، ب] **فإن** $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ﻫس = \int_{أ}^{حـ} ر(س)\,ﻫس + \int_{حـ}^{ب} ر(س)\,ﻫس$

وبصوره عامة : إذا كانت أ < ب < حـ < ء

فإن $\int_{أ}^{ء} د(س)\,ﻫس = \int_{أ}^{ب} ر(س)\,ﻫس + \int_{ب}^{حـ} ر(س)\,ﻫس + \int_{حـ}^{ء} ر(س)\,ﻫس$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

تذكر أن :

❶ إذا كانت د(س) دالة فردية فإن $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ds$ = صفر وأن د(س) تكون فردية إذا كان د(-س) = - د(س)

ومن ذلك :

① $\int_{-٢}^{٢} \frac{س^٣ + ٣س}{س^٢ + ١}\,ds$ = صفر

② $\int_{-٢}^{٢} س^{١}\sqrt{س^٢ + ٣}\,ds$ = صفر

③ $\int_{-٢}^{٢} (٢س^{٥} - ٣جا\frac{\pi}{٦}س)\,ds$ = صفر

④ $\int_{-٢}^{٢} س^٣(٣ - ٢|س|)\,ds$ = صفر

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

❷ إذا كانت د(س) دالة زوجية فإن $\int_{-أ}^{أ} د(س)\,ds = 2\int_{0}^{أ} د(س)\,ds$ وأن د(س) تكون زوجية إذا كان د(-س) = د(س)

ومن ذلك :

① $\int_{-2}^{2} (س^2 - 1)\,ds = 2\int_{0}^{2} (س^2 - 1)\,ds = 2\left[\frac{1}{3}س^3 - س\right]_{0}^{2} = 2 \times (\frac{8}{3} - 2) = \frac{4}{3}$

② $\int_{-4}^{4} (4 - |س|)\,ds = 2\int_{0}^{4} 4 - |س|\,ds = 2\int_{0}^{4} (4 - س)\,ds = 2\left[4س - \frac{1}{2}س^2\right]_{0}^{4} = 2(16 - 8) = 16$

③ $\int_{-1}^{1} \sqrt{س^4 + س^2}\,ds = 2\int_{0}^{1} \sqrt{س^2(س^2 + 1)}\,ds = 2\int_{0}^{1} س\sqrt{س^2 + 1}\,ds = 2 \times \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2س(س^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\,ds$

$= 2 \times \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} \times (س^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}\left[(2)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2} - 1]$

④ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |جاس|\,ds = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جاس\,ds = 2 \times (-جتاس)_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2(جتا\frac{\pi}{2} - جتا0) = 2$

f D.M.RAZK موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

❸ إذا كانت د(س) دالة فردية ، أ ، ب أعداد موجبة $\int_{-أ}^{أ} د(س) \cdot ءس = -\int_{-ب}^{ب} د(س) \cdot ءس$

❹ إذا كانت د(س) دالة زوجية أ ، ب أعداد موجبة $\int_{-أ}^{أ} د(س) ءس = \int_{-ب}^{ب} د(س) ءس$

$ف = \int_{-٥}^{٣-} = -\int_{٣}^{٥}$

$ن = \int_{٣}^{٥}$

صام ميرة

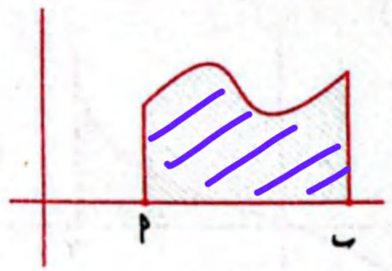
تطبيقات علي التكامل المحدد

أولاً : المساحات في المستوي:

① المساحة المحصورة بين منحني الدالة د(س) ومحور السينات :

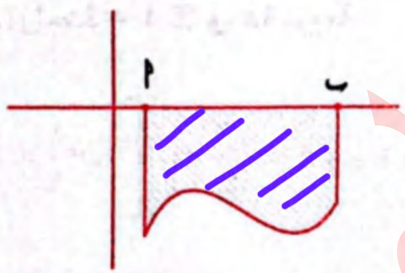
إذا كانت الدالة د(س) متصلة في [أ ، ب] وكانت (م) مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة د(س) ومحور السينات والمستقيمين س=أ ، س = ب

إذا كانت المساحة فوق محور السينات



فإن م= $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ds$

إذا كانت المساحة أسفل محور السينات



فإن م = $-\int_{أ}^{ب} د(س)\,ds = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\,ds\right|$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

① $\int_{0}^{2} \sqrt{4-س^2}\, د س$ = ... وحدة مربعة

(أ) ٠ (ب) ٢ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

$ص = \sqrt{4-س^2}$

$ص^2 = 4-س^2$

$س^2 + ص^2 = 4$

نق = ٢

$\frac{1}{4} \times \pi \times ٢^2 = \pi$

م. صام ميرة

② $\int_{-1}^{1} \sqrt{16-16س^2}$ د س = ... وحدة مربعة

(أ) 4π (ب) 2π (ج) π (د) 16π

$\int_{-1}^{1} \sqrt{4(4-4س^2)}$ د س

ص = $\sqrt{4-4س^2}$

ص^2 = $4-4س^2$

$س^2 + \frac{ص^2}{4} = 1$

نق = 1

$\frac{1}{2}\pi نق^2 = \frac{1}{2}\pi$

$4 \times \frac{1}{2}\pi = 2\pi$

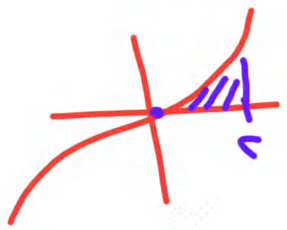
صام صيرة

(٣) مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات ص = ٠ ، س = ٢ ، ص = $س^{٣}$ تساوي ..... وحدة مربعة

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٤ (د) ٨

$\therefore$ المساحة $= \int_{٠}^{٢} س^{٣} \, د س$

$= \left[\frac{١}{٤} س^{٤} \right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٤} \times ٢^{٤} - ٠ = ٤$



صام ميرة

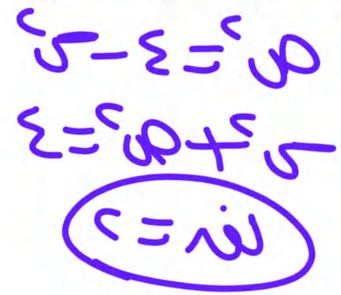
ثانياً : حجوم الأجسام الدورانية

① الدوران حول محور السينات:

❶ حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحدودة بمنحني الدالة د(س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو: $ح = \pi \int_{أ}^{ب} (د(س))^{٢} \, دس$

① $\pi \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^{٢}) \, دس$ هو حجم .....

(أ) كره طول نصف قطرها ٤ وحدات
(ب) كرة طول نصف قطرها وحدتان
(حـ) مخروط دائري قائم إرتفاعه ٤ وحدات
(د) اسطوانة دائريه قائمة ارتفاعها ٤ وحدات)



حميرة

② أ π نق^{٢} ع س = ...

ب $\frac{١}{٣}\pi$ ع^{٣}

ج حجم اسطوانة دائريه قائمة ارتفاعها ع وطول نصف قطرها نق

د مساحة سطح كره نصف قطرها يساوي ع

هـ المساحة الجانبية لأسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ع وطول نصف قطرها نق

π نق^{٢} ع

π نق^{٢} ع

صام ميرة

③ $\int_{0}^{نق} \pi س ص د س$ = ...

(أ) محيط دائرة طول نصف قطرها نق

(ب) نصف محيط دائرة طول نصف قطرها نق

(حـ) نصف مساحة دائرة طول نصف قطرها نق

(د) نصف حجم كرة

$\frac{1}{2}\pi س^2 |_{0}^{نق}$

$\frac{1}{2}\pi نق^2$

م/ صام ميرة

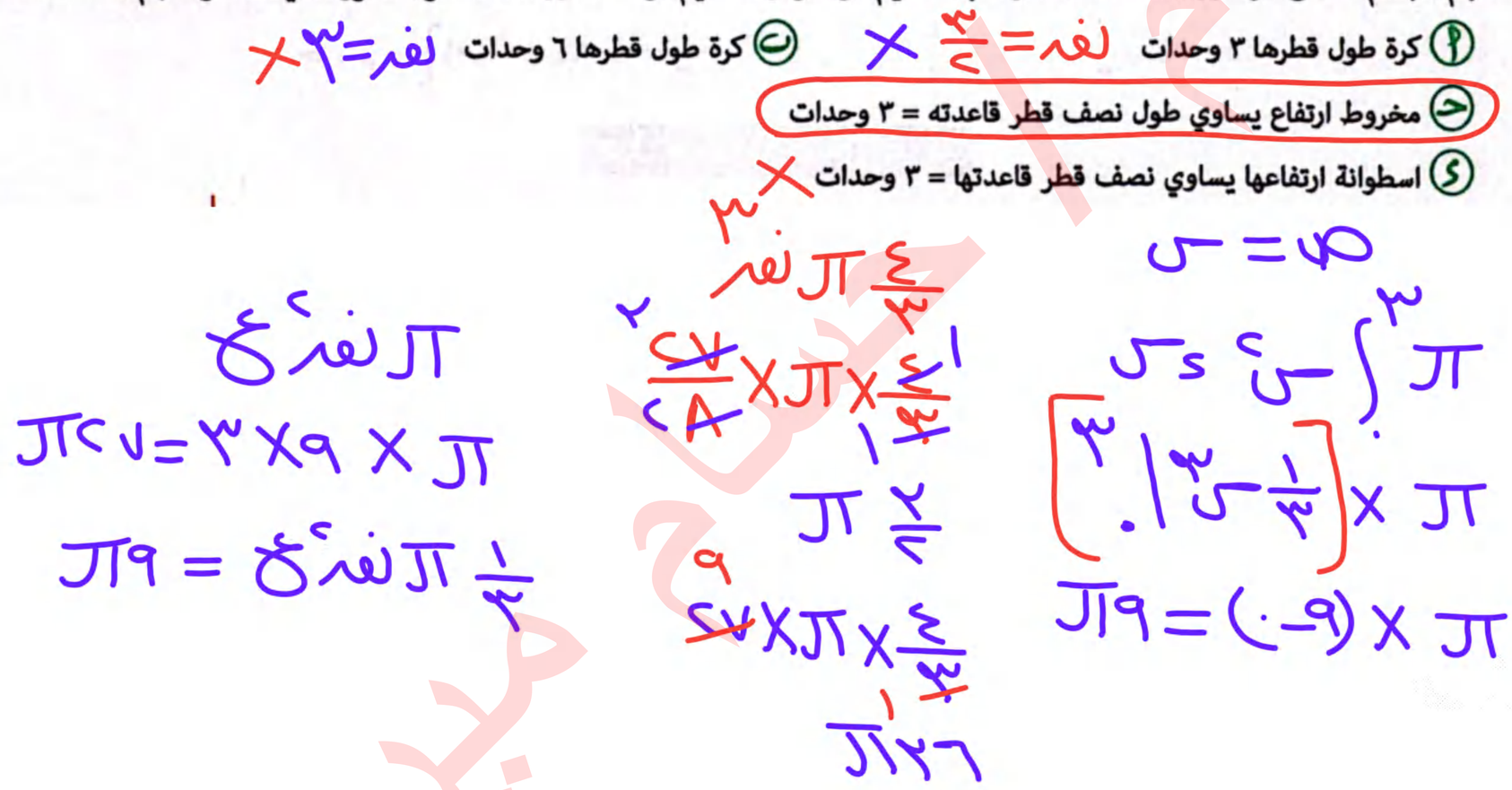
④ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيم ص=س والمستقيم س = ٣ دوره كاملة حول محور السينات هو حجم .....

أ كرة طول قطرها ٣ وحدات

ب كرة طول قطرها ٦ وحدات

حـ مخروط ارتفاع يساوي طول نصف قطر قاعدته = ٣ وحدات

د اسطوانة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها = ٣ وحدات



صام ميرة

حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني المذكور والمستقيمات المذكورة دورة كاملة حول محور السينات تساوي .....وحدة مربعة

① ص = س^{٢} ، المستقيمين س = -٢ ، س = ٢ يساوي ..... وحدة مكعبة

(أ) $\pi \frac{١٦}{٥}$ (ب) $\pi \frac{٣٢}{٥}$ (جـ) $\pi \frac{٦٤}{٥}$ (د) $\pi ٤$

$$\pi \int_{-٢}^{٢} س^{٤} \, د س = \pi \frac{٦٤}{٥}$$

صام ميرة

② ص = $\frac{٢}{س}$ والمستقيمين س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ يساوي .....

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٢}$ جـ) $\pi ٢$ د) $\pi ٣$

$$\int_{١}^{٤} \pi \frac{٤}{س^{٢}} \, د س$$

$$\pi ٤ \int_{١}^{٤} س^{-٢} \, د س$$

$$= \pi ٣$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي D.M.RAZK

③ ص = ٢ √س ، ص = ٠ ، س = ١ يساوي .....

أ) $-\pi$ ب) ٠ حـ) π د) $\pi 2$

$$\int_{0}^{\pi} 4 س \, د س = \pi 2$$

م. صام ميرة

④ ص = $\sqrt{٢س + ١}$ ، ص = ٠ ، س = -١، س = ١ يساوي .....

أ) π ب) $\frac{٣\pi}{٢}$ ج) $\pi ٢$ د) $\frac{\pi ٥}{٢}$

$$\int_{-١}^{١} \pi (س + ١)^{٢} \, د س = \pi ٢$$

صام ميرة

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizk